# 量 子 场 论

胡瑶光 编著

华东师范大学出版社

# 前 言

量子场论是粒子物理的基本理论。它的基本思想和方法，也被用于其它物理学科。它是理论物理研究生的必修课程，也是物理理论工作者需要的理论基础。

量子场论的专著和教材，已经出版了许多种。其中，有不少是有影响的著作。我们曾经采用作为教材或主要参考书的有：朱洪元的《量子场论》；胡宁的《量子场论》；邹国兴的《量子场论导论》，李政道的《粒子物理和场论导引》；D. Lurie 的《Particles and Fields》；J. D. Bjorken, S. D. Drell 的《Relativistic Quantum Fields》。现在，我们按照研究生课程的要求，编写了本书。希望它能够比较适合当前的教学需要。本书内容的深广度，与 Lurie 的相近。本书采用的度规和符号，与 Bjorken 和 Drell 的一致，但 $\gamma_5$ 差一负号。

近廿年来，粒子物理的发展是迅速的，规范对称理论逐渐占居了统治地位。我们力图在本书中反映新的理论观点和方法，让科学研究成果尽快传播开去。但是，量子场论是一门基础课程，必需论述许多基本的、比较成熟的内容。新成果的反映，只能是适度的。所以，本书反映的新成就，是不充分的。拙作《规范场论》，补充了这方面的不足，可以作为本书的续篇。

粒子物理是一门比较艰深的学科。量子场论是一门比较不容易掌握的学科。初学者常常碰到难以学懂的困难。鉴于此，我们在着重阐述物理概念的同时，详细论述了计算的过程和要点，力图让读者比较容易懂一些。这是我们的愿望。

现代的量子场论，都是拉格朗日场论。拉格朗日密度，在量子场论中，居于显要地位。它能够明显地揭示场的对称性。它

和运动方程有简明、直接的关系。由它进行量子化和重正化，也是简便的。本书的第一章论述自由场的波动方程。第二章由波动方程推出自由场的拉格朗日密度，进而导出在对称变换下，场量的变换规律。第三章用正则方法把场量子化，并讨论场的量子性质。对称性在物理理论中的地位，与日俱增。在现代的相互作用理论中，它逐渐占居控制地位。现在，人们主要从对称性的要求，来确定相互作用的形式。特别是，从定域规范不变的要求，来确定规范相互作用理论。质量的存在，总要破坏某些对称性。对称性的破缺，可能就是质量的起源。在本书的第四章中，我们阐述了这些理论思想和方法，介绍了相应的理论。

相互作用场的运动方程，是非线性方程，求解是困难的。这给量子场论解决实际问题带来不便。人们采用相互作用表象、绝热近似、微扰理论来处理散射问题，就避开了这一困难，取得了重大成就。我们在第五、六、七章中，论述了这些方法，并用它计算了一些过程。

圈图计算存在发散困难，曾经使量子场论的发展停顿下来。人们用重正化方法，克服了这一困难，并获得了新的成果。我们在第七、第八章中，进行了系统的、简要的论述。

格林函数和相互作用流、荷，是粒子物理中带有普遍意义的课题。我们在第九、第十章中，对它们作了基本的、简单的讨论。

量子场论涉及的内容，是多方面的。我们认为，本书论述的内容、观点、方法，是基本的、重要的，是研究生必需掌握的。限于作者的水平，取材未必恰当，论述也难免有不妥之处，请读者批评指正。

蒋元方同志以我的讲稿和他的听课笔记为基础，曾编印了一本"量子场论"讲义，作者在 1984 年夏用于烟台讲学，是本书的初稿；李凌云同志负责编辑本书。作者对他们表示深深的感谢。

# 目　录

# 第一章 相对论波动方程及其平面波解

在量子场论中，经典的自由场波动方程及其平面波解，具有基本的、重要的意义。在这一章里，我们将导出自由场的相对论波动方程，求出它的平面波解，阐明解的意义。薛定格方程是非相对论性的。在第一节中回顾一下，旨在为以下诸节中导出相对论方程作引导。在第一节中我们还要介绍一些符号和度规。

## §1. 引 言

在量子力学中，粒子的状态用波函数 $\psi(x)$ 描述，粒子的运动规律，由薛定格(Schrödinger)方程

$$i\frac{\delta\psi(x)}{\partial t}=-\frac{\nabla^2}{2m}\psi(x)+V(x)\psi(x) \qquad (1\text{–}1)$$

表征。$m$ 是粒子的质量，$V(x)$ 是粒子所处的外场的势。

**符号和度规** $x$ 表示粒子的时空坐标，是一个有四个分量的四维矢量。$x^\mu$ $(\mu=0,1,2,3)$ 是它的逆变分量，与 $1+3$ 维的时空坐标 $t$ 和 $\vec{x}$ 的关系为：$x^0=t$，$x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$，简写为 $x^\mu=(t,\ \vec{x})$。我们采用的度规张量是

$$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}。\qquad (1\text{–}2)$$

即 $g_{00}=g^{00}=1$，$g_{11}=g^{11}=g_{22}=g^{22}=g_{33}=g^{33}=-1$，$\mu\neq\nu$ 的

$g_{\mu\nu}=0$。四维时空矢量 $x$ 的协变分量定义为 $x_\mu=g_{\mu\nu}x^\nu$，与 1+3 维时空坐标的关系为：$x_0=t, x_1=-x, x_2=-y, x_3=-z$，简写为 $x_\mu=(t,-\vec{x})$。四维时空矢量 $x$ 的模定义为

$$x^2=x^\mu x_\mu=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu=t^2-\vec{x}^2。\qquad (1\text{-}3)$$

我们用 $p$ 表示四维动量，其逆变分量 $p^\mu\ (\mu=0,1,2,3)$ 与 1+3 维能量 $E$ 和动量 $\vec{p}$ 的关系为：$p^0=E$，$p^1=p_x$，$p^2=p_y$，$p^3=p_z$，简写为 $p^\mu=(E,\vec{p})$。其协变分量定义为 $p_\mu=g_{\mu\nu}p^\nu$，与 1+3 维能量、动量的关系为：$p_\mu=(E,-\vec{p})$。四维动量的模方定义为

$$p^2=p^\mu p_\mu=g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu=E^2-\vec{p}^2。\qquad (1-4)$$

四维时空坐标 $x$ 和四维动量 $p$ 的标积定义为

$$x\cdot p=x^\mu p_\mu=x_\mu p^\mu=Et-\vec{p}\cdot\vec{x}。\qquad (1\text{-}5)$$

上述的符号、度规以及模方和标积的定义等，适用于其它的四维矢量和相应的 1+3 维的量，在本书中具有普遍的意义。

我们还用 $\partial$ 表示四维时空的导数，其协变分量 $\partial_\mu$ 和逆变分量 $\partial^\mu$ 分别是

$$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right),$$

$$\partial^\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ -\nabla\right),\qquad (1\text{-}6)$$

$$\partial_\mu=g_{\mu\nu}\partial^\nu,\ \partial^\mu=g^{\mu\nu}\partial_\nu,$$

其模方定义为

$$\partial^2=\partial^\mu\partial_\mu=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2。\qquad (1\text{-}7)$$

自然单位　我们论述的量子场论，是相对论的量子理论，因而公式中常常要出现光速 $c$ 和普朗克常数 $h$。为了使公式形式简洁，而采用自然单位。在自然单位中，

$$c=\hbar=1,\ \hbar=h/2\pi。\tag{1-8}$$

这样,在公式中就将不出现 $c$ 和 $h$。

**波函数的意义** 在介绍了一些符号、度规和单位以后,我们再来讨论薛定格方程 (1-1) 式。首先,讨论满足 (1-1) 式的波函数 $\psi(x)$ 的意义。大家知道,它具有几率的意义,$\psi^*(x)\psi(x)$ 表示时刻 $t$ 在 $\vec{x}$ 点发现粒子的几率密度。为什么它能作这样的解释呢?因为它满足几率流守恒定律,而且是正定的。几率守恒和正定是物理上必需满足的要求。

对 (1-1) 式取复数共轭,得

$$-i\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial t}=-\frac{\nabla^2}{2m}\psi^*(x)+V(x)\psi^*(x)。\tag{1-9}$$

这里假设外场的势 $V(x)$ 是实的。用 $\psi^*(x)$ 左乘 (1-1) 式,用 $\psi(x)$ 右乘 (1-9) 式,然后相减,得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*(x)\psi(x))=\frac{1}{2m}\nabla\cdot(\psi^*(x)\nabla\psi(x)-\nabla\psi^*(x)\psi(x))。\tag{1-10}$$

令

$$j^0(x)=\psi^*(x)\psi(x),$$

$$\vec{j}=\frac{-i}{2m}(\psi^*(x)\nabla\psi(x)-\nabla\psi^*(x)\psi(x))。$$

考虑到

$$j^\mu=(j^0,\vec{j}),$$

$$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)$$

(1-10) 式就可以写成

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0,\tag{1-11}$$

这就是表示守恒定律的连续性方程。

实际上,将 (1-11) 式对三维空间求体积分

$$\int \partial_\mu j^\mu(x)\, dV = \int \left( \frac{\partial j^0(x)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(x) \right) dV = 0, \qquad (1\text{-}12)$$

对于上式中的第二项，利用高斯定理

$$\int_V \nabla \cdot \vec{j}(x) dV = \oint_s \vec{j}(x) \cdot d\vec{S},$$

当所有的场都局限在体积 $V$ 中时，在包围体积 $V$ 的 $S$ 面上没有场，$\vec{j}(x)=0$，因而上列积分为零。这时，(1-12) 式为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int j^0(x)\, dV = 0。$$

由是可知，(1-11) 式确实是表示守恒定律的方程，$j^\mu(x)$ 是守恒流，而

$$Q = \int j_0(x)\, dV \qquad (1\text{-}13)$$

是守恒量，$j_0(x)$ 就是守恒量的密度。

由是可知，(1-10) 式是表示守恒定律的连续性方程，而

$$j^\mu = (j^0, \vec{j}), \quad j^0 = \psi^* \psi,$$

$$\vec{j} = \frac{-i}{2m}(\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi)$$

是守恒流。而且 $j^0 = \psi^*\psi \geq 0$ 是正定的。所以，可以把 $\psi^*(x)\psi(x)$ 解释为几率密度。

**方程的导出** 方程 (1-1) 式是薛定格在 1926 年建立的。为了下面要导出相对论的波动方程，这里，我们用一种便于推广的方法来导出薛定格方程。显然，方程 (1-1) 式

$$i\frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi(x) \qquad (1\text{-}14)$$

即自由粒子的场方程，有平面波解

$$\psi(x) \sim e^{-ip\cdot x} = e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}}。$$

代入 (1-14) 式，得

$$E\psi(x)=\frac{p^2}{2m}\psi(x),\quad E=\frac{\vec{p}^2}{2m}。\tag{1-15}$$

这是非相对论的、能量 $E$ 动量 $\vec{p}$ 和质量 $m$ 的关系式。反过来，我们把 (1-15) 式作为基础，从它出发，作一代换

$$E\to i\frac{\partial}{\partial t},\quad \vec{p}\to -i\nabla,\tag{1-16}$$

就可以由 (1-15) 式得到 (1-14) 式。即在 (1-16) 式的代换下

$$E\psi(x)=\frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(x)\to$$

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=-\frac{\nabla^2}{2m}\psi(x)。\tag{1-17}$$

薛定格方程自1926年建立以来，已得到广泛的证实和应用，成为现代科学技术的基础。但是，它是非相对论的。在 (1-1) 式中，含时间的一次导数，空间的两次导数，时间、空间处于不同的地位。在 (1-15) 式中，能量是一次方，动量是二次方，也处于不同的地位。相对论认为：时间、空间合成四维矢量 $x=(t,\vec{x})$ 是平等的；能量、动量合成四维动量 $p=(E,\vec{p})$ 也是平等的。从相对论的观点看来，薛定格方程是非相对论的，是有缺陷的，是需要进行修改的。因此，人们致力于建立相对论的波动方程。

## §2．克莱因-戈登方程

第一个相对论波动方程，是克莱因(Klein)和戈登(Gordon)在 1926 年建立的，人们称之为克莱因-戈登方程。

**方程的导出** 上一节说过，用非相对论的能量 $E$、动量 $\vec{p}$ 和质量 $m$ 的关系 (1-15) 式，按 (1-16) 式将能量、动量换成相应的算符，就得到薛定格方程 (1-17) 式。我们以同样的方式，导出克莱因-戈登方程。从相对论的观点看来，能量、动量、质量的

关系,不是(1-15)式,而是

$$E^2=\vec{p}^2+m^2。\tag{1-18}$$

当粒子速度很小,以致 $|\vec{p}|\ll m$ 时,

$$E=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}=m\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m^2}}\simeq m\left(1+\frac{\vec{p}^2}{2m^2}\right)。$$

这表明:(1-15)式是(1-18)式在非相对论条件下的近似。将(1-18)式中的能量、动量,作如(1-16)式的代换,即

$$E\to i\frac{\partial}{\partial t},\quad \vec{p}\to -i\nabla,$$

$$E^2\phi(x)=(\vec{p}^2+m^2)\phi(x)\to$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x)=-\nabla^2\phi(x)+m^2\phi(x),$$

就得到克莱因-戈登方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+m^2\right)\phi(x)=0。\tag{1-19}$$

由于时空导数构成四维矢量 $\partial=(\partial_0,\nabla)$,上式可以写成

$$\begin{gathered}(\partial^2+m^2)\phi(x)=0,\\ (\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\phi(x)=0,\end{gathered}\tag{1-20}$$

这就是四维形式的克莱因-戈登方程。

**平面波解** (1-19)式是线性齐次方程,有平面波解

$$\phi(x)\sim e^{\mp ik\cdot x}$$

$k$ 是四维动量,$k^\mu=(E,\vec{k})$。把上式代入(1-20)式,得

$$(-k^2+m^2)\phi(x)=0,$$

$$k^2-m^2=E^2-\vec{k}^2-m^2=0,\tag{1-21}$$

$$E=\pm\omega,\ \omega=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}。$$

这表明:克莱因-戈登方程有正能解,也有负能解。用它来描述

粒子的运动，被描述粒子的能量，可以是正的，也可以是负的。人们知道，量子化的克莱因-戈登方程，描述自旋为零的粒子。有整数自旋的自由粒子，是不允许有负能量的。如果允许它具有负能量，那末按照物体总是力图使自己能量最低的自然规律，它们就都会力图下落到能量 $E\to-\infty$ 的状态，就会招致自然界的灾难。这就是所谓的克莱因-戈登方程的负能解困难。

令 $k^0=\omega$，则 $k\cdot x=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}$，

$$i\frac{\partial e^{-ikx}}{\partial t}=+\omega e^{-ikx},\quad i\frac{\partial e^{ikx}}{\partial t}=-\omega e^{ikx},$$

即 $e^{-ikx}$ 是正能解，$e^{ikx}$ 是负能解。有时，人们把 $e^{-ikx}$ 叫做正频解，把 $e^{ikx}$ 叫做负频解。

**正交、规一化** 对于正能解，人们常取

$$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e^{-ikx},\tag{1-22}$$

$V$ 是规一化体积。在体积 $V$ 中，它是按照

$$\int f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)\,dV=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\tag{1-23}$$

规一化的。$\overleftrightarrow{\partial_0}$ 的定义是

$$a\overleftrightarrow{\partial_0}b=a\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial t}b,\tag{1-24}$$

把 (1-22) 式、(1-24) 式代入 (1-23) 式左边，得

$$\int f_k^*(x)\,i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)dV=\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\omega'+\omega)\int e^{i(k-k')x}dV。$$

当 $\vec{k}=\vec{k'}$ 时，$\omega=\omega'$，上式积分为

$$\frac{1}{V}\int dV=1。$$

当 $\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{k'}$ 时，因 $dV = dx_1 dx_2 dx_3$，对任一坐标如 $x_1$ 的积分，有

$$\int e^{i(k_1 - k_1')x_1} dx_1 = \frac{1}{i(k_1 - k_1')} e^{i(k_1 - k_1')x_1} \Bigg|_{x_1'}^{x_1''}$$

我们假设边界条件是周期性的，即假设

$$e^{i(k_1 - k_1')x_1'} = e^{i(k_1 - k_1')x_1''},$$

因而上列积分为零。这就证明了（1-23）式表示的正能解的正交、规一化。

**波函数的意义** 为了理解波函数 $\phi(x)$ 的意义，我们先导出有关的连续性方程。对克莱因-戈登方程（1-20）式

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0 \qquad (1\text{-}20)$$

取复数共轭，得

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi^*(x) = 0。 \qquad (1\text{-}25)$$

以 $\phi^*(x)$ 左乘（1-20）式，以 $\phi(x)$ 右乘（1-25）式，得

$$\phi^*(x)(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0,$$
$$\phi(x)(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi^*(x) = 0,$$

两式相减，得

$$\phi^*(x)\partial^\mu \partial_\mu \phi(x) - \phi(x)\partial^\mu \partial_\mu \phi^*(x) = 0,$$
$$\partial^\mu[\phi^*(x)\partial_\mu \phi(x) - \phi(x)\partial_\mu \phi^*(x)] = 0, \qquad (1\text{-}26)$$

这就是由克莱因-戈登方程导出的连续性方程。与（1-11）式、（1-13）式比较可知，它表示一种守恒定律，守恒流为

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0,$$
$$j_\mu(x) = i[\phi^*(x)\partial_\mu \phi(x) - \phi(x)\partial_\mu \phi^*(x)], \qquad (1\text{-}27)$$

守恒量为

$$Q = \int j^0(x) dV,$$
$$j^0(x) = i[\phi^*(x)\dot{\phi}(x) - \phi(x)\dot{\phi}^*(x)]。 \qquad (1\text{-}28)$$

守恒流、守恒量中的 $i$ 因子，保证了它们是实数。如果以正能

解、负能解代入 (1-28) 式，由于

$$i\dot{\phi}(x)=\pm\omega\phi(x),$$

$$-i\dot{\phi}^*(x)=\pm\omega\phi^*(x),$$

$$j^0(x)=\pm2\omega\phi^*(x)\phi(x),$$

$\phi^*(x)\phi(x)$ 是正定的，因而 $j^0(x)$ 是可正可负的。所以，$j_0(x)$ 虽然是守恒量的密度，却不能作几率解释。若作几率解释，就有所谓的负几率的困难。满足克莱因-戈登方程的波函数，可以有负能量、负几率的解。这是物理上不允许的。因此，克莱因-戈登方程，在量子力学的框架内，是没有意义的。正是这种原因，克莱因-戈登方程提出不久，就被搁置起来。直至 1934 年，泡里 (Pauli) 和韦斯可夫(Weisskopf)把它量子化，才使它复活了。

## §3. 狄拉克方程

克莱因-戈登提出的相对论波动方程，因负能困难和负几率困难而被搁置起来了。1928 年，狄拉克 (Dirac) 提出了另一个相对论波动方程，人们称之为狄拉克方程。

**线性因子化** 薛定格方程含时间的一次导数、空间的两次导数，是非相对论的。克莱因-戈登方程中，时空导数都是二次的，是相对论的，但有负能困难和负几率困难。狄拉克设想，正确的相对论波动方程中，时空导数都是一次的。为此，他把相对论的能量、动量、质量的关系式

$$E^2-\vec{p}^2-m^2=0$$

分解为两个线性因子。按照一般的代数方法，上式可以分解为

$$E^2-\vec{p}^2-m^2=\left(E+\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\right)\left(E-\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\right),$$

把 $E$、$\vec{p}$ 换成算符后，$\sqrt{-\nabla^2+m^2}$ 就成为没有意义的东西，不能用来建立方程。狄拉克提出，用 $\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m$ 代替

$\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$，把 $E^2-\vec{p}^2-m^2$ 线性因子化为

$$E^2-\vec{p}^2-m^2=(E+\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)(E-\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m), \tag{1-29}$$

用其中的一个因子，如 $(E-\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m)$，换成算符，作用于波函数，就得到狄拉克方程

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi(x), \tag{1-30}$$

显然

$$H=-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m \tag{1-31}$$

就是粒子的哈密顿算符。

$\alpha$、$\beta$ **矩阵**　(1-29) 式右边

$$E^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)^2=E^2-\frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)p_ip_j-(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)p_im-\beta^2m^2,$$

要使它与 (1-29) 式的左边相等，就要求

$$\frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)=\delta_{ij},\quad \alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0,\quad \beta^2=1, \tag{1-32}$$

这就是狄拉克方程中引进的四个量 $\alpha_i\ (i=1,2,3)$ 和 $\beta$ 所必需满足的关系式。即它们是彼此反对易，而且任一个的平方都等于一。显然，它们不可能是普通的数，而可能是矩阵。由它们构成哈密顿量，如 (1-31) 式所示，应该是厄米的，因而它们也应该是厄米矩阵。总之

$$\alpha_i,\ \beta\ \text{彼此反对易};\ \alpha^2=1,\ \beta^2=1;\ \alpha_i^+=\alpha_i,\ \beta^+=\beta。 \tag{1-33}$$

由此可以推知，它们还都是无迹的

$$\mathrm{Tr}\alpha_i=0,\quad \mathrm{Tr}\beta=0。 \tag{1-34}$$

实际上

$$\mathrm{Tr}\alpha_i = \mathrm{Tr}\alpha_i\beta^2 = \mathrm{Tr}\beta\alpha_i\beta = -\mathrm{Tr}\alpha_i\beta^2 = -\mathrm{Tr}\alpha_i = 0。$$

第一个等号是由于 $\beta^2=1$，第二个等号是由于 $\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA$，第三个等号是由于 $\alpha_i$ 和 $\beta$ 反对易。

$\alpha^2=1$、$\beta^2=1$ 意味着它们的本征值为 $\pm1$。对角化以后，$\alpha$、$\beta$ 的元素为 $+1$ 或 $-1$。无迹，即对角元素之和为零。本征值为 $\pm1$ 的无迹矩阵，一定是偶矩阵。由此可知，$\alpha_i$ 和 $\beta$ 是 $n\times n$ 矩阵，$n$ 是偶数。

**标准表示** 偶矩阵中，最低价的是 $2\times2$ 矩阵。它们有四个是线性独立的。通常取

$$\sigma_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{vmatrix},$$

$$\sigma_3=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix},\qquad I=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}。\tag{1-35}$$

前三个是泡里矩阵，后一个是 $2\times2$ 单位矩阵。其它 $2\times2$ 矩阵，可以由它们线性组合而成。可是，它们和它们的线性组合，都不能满足 (1-32) 式的要求，不能用作我们所需要的 $\alpha$ 和 $\beta$。

$2\times2$ 矩阵不能满足要求。能满足要求的最低阶偶矩阵就是 $4\times4$ 矩阵。现在，人们采用的、满足 (1-32) 式要求的 $\alpha$ 和 $\beta$，就是 $4\times4$ 矩阵。满足 (1-32) 式的 $4\times4$ 矩阵，有无穷多个，人们较常采用的有

$$\alpha_i=\begin{vmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{vmatrix},\qquad \beta=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{vmatrix},\tag{1-36}$$

$\sigma_i$ 和 $I$ 就是 (1-35) 式中的 $2\times2$ 泡里矩阵和单位矩阵。$\alpha_i$、$\beta$ 取上式表示时，叫做标准表示。

**协变形式** (1-30) 式、(1-31) 式表示的狄拉克方程，可以叫做哈密顿形式。(1-31) 式表示的 $H$ 是自由粒子的哈密顿量，如果再加上粒子所处外场的势，(1-30) 式、(1-31) 式就成为

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=H\psi(x),$$

$$H=-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m+V, \tag{1-37}$$

它描述在外场中运动的粒子的规律。用狄拉克方程求解具体问题时，常用哈密顿形式（1-36）式、（1-37）式或（1-30）式、（1-31）式。作理论讨论时，却常用另一种形式。

用 $\beta$ 矩阵左乘（1-30）式，得

$$\left(\beta i\frac{\partial}{\partial t}+\beta\vec{\alpha}\cdot i\nabla-m\right)\psi(x)=0。$$

定义

$$\gamma_0=\gamma^0=\beta,\quad \vec{\gamma}=\beta\vec{\alpha},$$
$$\gamma^\mu=(\gamma^0,\vec{\gamma}),\quad \gamma_\mu=g_{\mu\nu}\gamma^\nu=(\gamma_0,-\vec{\gamma}), \tag{1-38}$$

考虑到 $\partial_\mu=(\partial_t,\nabla)$，上式可以写成

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=0,$$
$$(i\gamma\cdot\partial-m)\psi(x)=0, \tag{1-39}$$

这就是狄拉克方程的协变形式。

**$\gamma$ 矩阵** 在本书中，$\gamma$ 矩阵是按（1-38）式由 $\alpha$、$\beta$ 矩阵定义的。它们的性质和对易关系，可以由此推出。首先，$\gamma_0$ 是厄米的，$\vec{\gamma}$ 是反厄米的：

$$\gamma_0^+=\beta^+=\beta=\gamma_0,$$
$$\gamma^{i+}=(\beta\alpha_i)^+=\alpha_i^+\beta^+=\alpha_i\beta=-\beta\alpha_i=-\gamma^i,$$
$$\gamma_0^+=\gamma_0,\quad \gamma_i^+=-\gamma_i。 \tag{1-40}$$

其次，它们的基本的对易关系是

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu}。 \tag{1-41}$$

这意味着，四个 $\gamma$ 矩阵是彼此反对易的，而其平方是

$$\gamma_0^2=1,\quad \gamma_i^2=-1。 \tag{1-42}$$

（1-41）式、（1-42）式的证明是简单的，例如

$$\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i=\beta\alpha_i\beta\alpha_j+\beta\alpha_j\beta\alpha_i=-\alpha_i\alpha_j-\alpha_j\alpha_i=-2\delta_{ij},$$

$$\gamma_i^2=(\beta\alpha_i)^2=\beta\alpha_i\beta\alpha_i=-\alpha_i^2=-1。$$

在标准表象中，$\alpha$、$\beta$ 取 (1-36) 式的形式，$\gamma$ 矩阵就是

$$\gamma^0=\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix},\qquad \vec{\gamma}=\begin{vmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{vmatrix}。\tag{1-43}$$

**波函数的意义** (1-36) 式中的 $\alpha$ 和 $\beta$，(1-39) 式中的 $\gamma$，都是 $4\times4$ 矩阵。因而，其中的波函数 $\psi(x)$，就必需是 $4\times1$ 矩阵，即

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{vmatrix},\tag{1-44}$$

$\psi_\alpha(x)$ $(\alpha=1,2,3,4)$ 是 $\psi(x)$ 的四个分量。

对 $\psi(x)$ 取厄米共轭，再右乘 $\gamma_0$，定义共轭波函数为

$$\overline{\psi}(x)=\psi^+(x)\gamma_0,\tag{1-45}$$

由 $\psi(x)$ 满足的方程，如 (1-39) 式，可以导出 $\overline{\psi}(x)$ 满足的方程。对 (1-39) 式取厄米共轭，得

$$\psi^+(x)(-i\gamma_\mu^+\overleftarrow{\partial}^\mu-m)=0,$$

再右乘 $\gamma_0$，得

$$\psi^+(x)(-i\gamma_\mu^+\overleftarrow{\partial}^\mu-m)\gamma_0=0,$$

利用 (1-40) 式、(1-41) 式和 (1-45) 式，就得到

$$\overline{\psi}(x)(i\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}^\mu+m)=0。\tag{1-46}$$

这就是共轭波函数 $\overline{\psi}(x)$ 需要满足的狄拉克方程。

用 $\overline{\psi}(x)$ 左乘 (1-39) 式，用 $\psi(x)$ 右乘 (1-46) 式，然后相减，得到连续性方程

$$\partial^{\mu}[\overline{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)]=0。$$

它表明有守恒定律，守恒流为

$$\partial^{\mu}j_{\mu}(x)=0,\quad j_{\mu}(x)=\overline{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x),\tag{1-47}$$

守恒量为

$$\int j_0(x)dV,\qquad j_0(x)=\psi^+(x)\psi(x)。\tag{1-48}$$

显然，$j_0(x)$ 是正定的，可以作几率解释。所以，人们对满足狄拉克方程的波函数 $\psi(x)$ 的意义，理解为 $\psi^+(x)\psi(x)$ 是时刻 $t$ 在空间 $\vec{x}$ 点出现粒子的几率密度。狄拉克方程和克莱因-戈登方程不同，不存在负几率困难。

**粒子自旋** 自由粒子的能量、动量、角动量是守恒的。量子力学告诉我们，表示守恒量的算符，应该是可以同时对易的。狄拉克方程描述的粒子的哈密顿算符，如（1-31）式所示，为

$$H=\alpha_i p_i+\beta m,\tag{1-31}$$

轨道角动量算符为

$$\vec{L}=\vec{X}\times\vec{p},\quad L_i=\varepsilon_{ijk}x_j p_k,\tag{1-49}$$

$p_i\,(i=1,2,3)$ 是动量算符 $\vec{p}=-i\nabla$。$\varepsilon_{ijk}$ 是三维全反对称张量，$i$、$j$、$k$ 中任意两个相等时为零，如 $\varepsilon_{112}=0$；$i$、$j$、$k$ 分别等于1、2、3，且顺次轮换时为正 1，如 $\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=+1$；次序有不顺时为负 1，如 $\varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=-1$。$x_i$ 和 $p_i$ 是正则共轭的变量，满足正则对易关系

$$[x_i,x_j]=0,\quad [x_i,p_j]=i\delta_{ij},\quad [p_i,p_j]=0。\tag{1-50}$$

由此可以推知

$$[H,p_i]=[\alpha_j p_j+\beta m,p_i]=0,$$

$$\begin{aligned}[H,L_i]&=[\alpha_s p_s+\beta m,\varepsilon_{ijk}x_j p_k]=\varepsilon_{ijk}\alpha_s p_k[p_s,x_j]\\&=-i\varepsilon_{ijk}\alpha_s p_k\delta_{sj}=-i\varepsilon_{ijk}\alpha_j p_k。\end{aligned}\tag{1-51}$$

这表明：狄拉克粒子的能量、动量是守恒的，轨道角动量是不守

恒的。如上所述，自由粒子的角动量应该是守恒的。轨道角动量不守恒，就意味着粒子还具有别的什么角动量。为此，我们采用标准表示(1-36)式，并定义算符 $\vec{\Sigma}$：

$$\Sigma_i = \begin{vmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{vmatrix}, \qquad \alpha_i = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{vmatrix},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \tag{1-52}$$

并计算

$$[H, \frac{1}{2}\Sigma_i] = [\alpha_s p_s + \beta m, \frac{1}{2}\Sigma_i]$$

$$= \frac{1}{2} p_s[\alpha_s, \Sigma_i] + \frac{1}{2} m[\beta, \Sigma_i],$$

$$[\beta, \Sigma_i] = 0,$$

$$[\alpha_s, \Sigma_i] = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_s \\ \sigma_s & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \sigma_s \\ \sigma_s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \sigma_s\sigma_i \\ \sigma_s\sigma_i & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \sigma_i\sigma_s \\ \sigma_i\sigma_s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & [\sigma_s, \sigma_i] \\ [\sigma_s, \sigma_i] & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2i\varepsilon_{sij}\sigma_j \\ 2i\varepsilon_{sij}\sigma_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2i\varepsilon_{sij}\alpha_j,$$

$$[H, \frac{1}{2}\Sigma_i] = i\varepsilon_{ijk}\alpha_j p_k \tag{1-53}$$

由(1-51)式、(1-53)式可知

$$[H, L_i + \frac{1}{2}\Sigma_i] = 0,$$

$$[H, \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}] = 0, \tag{1-54}$$

这表明：$\vec{L}+\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$是守恒量。$\vec{L}$是轨道角动量，$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$是狄拉克粒子固有的角动量，叫做自旋角动量，简称自旋。

按定义（1-52）式，推知

$$\left(\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\right)^2=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_1^2\end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix}\sigma_2^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix}\sigma_3^2 & 0\\ 0 & \sigma_3^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{3}{4}I=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)I, \tag{1-55}$$

这表明：粒子自旋为$\frac{1}{2}$，狄拉克粒子是费米子。

**负能和空穴** 狄拉克方程（1-30）式

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\vec{\alpha}\cdot\nabla-m\right)\psi(x)=0$$

有平面波解 $e^{-ipx}$，代入上式得

$$(E-\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-m)\psi(p)e^{-ipx}=0,$$

乘以 $(E+\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+m)$ 得

$$(E^2-\vec{p}^2-m^2)\psi(p)e^{-ipx}=0,\quad E^2=\vec{p}^2+m^2,$$

$$E=\pm E_p,\quad E_p=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}, \tag{1-56}$$

即狄拉克方程也有正能解和负能量，狄拉克理论也有负能困难。

狄拉克巧妙地克服了这一困难。由于狄拉克粒子是费米子，服从费米-狄拉克统计.服从泡里不相容原理，每一个量子态中不能多于一个粒子。所以，狄拉克定义真空为：所有负能态都被填满，而所有正能态都空着的状态为真空状态。当正能态有粒子或负能态中没有粒子时的状态，都是可观察的物理状态。负能态中缺少粒子的状态是空穴状态。这就是著名的空穴理论，它是半导体物理的基础，是电子技术的物理基础。

由此可知，狄拉克方程和克莱因-戈登方程不同，既不存在负几率的困难，负能解又引出了新的概念。它在量子力学的理论框架内是有意义的，它是相对论量子力学的基础。但是，从量子场论的观点看来，狄拉克方程和克莱因-戈登方程都是有意义的，都是重要的基本的场方程。

## §4. 能量、动量、旋量波函数

现在，我们来求解自由粒子的狄拉克方程

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\vec{\alpha}\cdot\nabla-\beta m\right)\psi(x)=0,$$

$\vec{\alpha}$、$\beta$ 取标准表示

$$\vec{\alpha}=\begin{vmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{vmatrix},\qquad \beta=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{vmatrix}。$$

**动量空间的狄拉克方程** 上列狄拉克方程是时空空间的，它有平面波解

$$\psi(x)=\psi(p)e^{\mp ip\cdot x}。$$

代入上式，就得到动量空间的狄拉克方程

$$(E-\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m)\psi(p)=0, \tag{1-57}$$

$\vec{\alpha}$、$\beta$ 是 $4\times4$ 矩阵，$\psi(p)$ 是 $4\times1$ 矩阵。$\vec{\alpha}$、$\beta$ 用标准表示，$\psi(p)$ 可以写成

$$\psi=\begin{vmatrix}\chi\\ \phi\end{vmatrix}, \tag{1-58}$$

(1-57) 式就成为

$$\left(\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{vmatrix}E-\begin{vmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{vmatrix}\cdot\vec{p}-\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{vmatrix}m\right)\begin{vmatrix}\chi\\ \phi\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} E-m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & E+m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \chi \\ \phi \end{vmatrix}=0,$$

$$(E-m)\chi-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\phi=0, \tag{1-59}$$

$$-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi+(E+m)\phi=0,$$

$\vec{\sigma}$ 是 $2\times2$ 矩阵，$\chi$、$\phi$ 是 $2\times1$ 矩阵。

**正、负能量解** 上一节说到，狄拉克方程有正、负能量解

$$E=\pm E_p,\quad E_p=\sqrt{\vec{p}^2+m^2},$$

(1-59) 式有正、负能量解。当 $E=+E_p$ 时，由 (1-59) 式的第二式得

$$\phi=\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi,$$

$$\psi_+=\begin{vmatrix} \chi \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi \end{vmatrix}。 \tag{1-60}$$

当 $E=-E_p$ 时，由 (1-59) 式的第一式，得

$$\chi=-\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\phi,$$

$$\psi_-=\begin{vmatrix} \dfrac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi \\ \chi \end{vmatrix}。 \tag{1-61}$$

(1-60) 式、(1-61) 式分别是狄拉克方程的正能量解和负能量解。

**向上、向下自旋解** 在 (1-60) 式和 (1-61) 式中，$\chi$ 是 $2\times1$ 矩阵，仍然是任意的，不能由狄拉克方程确定，要由其它物理条

件来确定。在量子力学中，波函数除规一化系数外，可以由完全的力学量组确定下来。表示完全的力学量组的算符是可以同时对角化的，它们之间是相互对易的。$\psi_+$ 和 $\psi_-$ 是 $H$ 和 $\vec{p}$ 的本征函数。要把其中的 $\chi$ 也确定下来，就需要一个与 $H$ 和 $\vec{p}$ 都可对易的算符，用该算符的本征函数来确定 $\chi$。按照这种方式来确定 $\chi$，是繁难的。我们采用简便的方法。取

$$\chi_1=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix},\qquad \chi_2=\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix},\tag{1-6}$$

它们是粒子自旋第三分量 $\frac{1}{2}\sigma_3$ 的本征函数

$$\frac{1}{2}\sigma_3\chi_1=\frac{1}{2}\chi_1,\qquad \frac{1}{2}\sigma_3\chi_2=-\frac{1}{2}\chi_2\tag{1-63}$$

因此，我们说：$\chi_1$ 是自旋向上的波函数，$\chi_2$ 是自旋向下的波函数。

**旋量波函数** 综合以上的结果，把 (1-61) 式中的 $\vec{p}$ 换成 $-\vec{p}$，令

$$u(p,s)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{vmatrix}\chi_s\\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\end{vmatrix},$$
$$v(p,s)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{vmatrix}\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\\ \chi_s\end{vmatrix},\tag{1-64}$$

这就是我们选取的旋量波函数。为简便起见，式中用 $E$ 代替 $E_p$。$2\times1$ 矩阵前的因子，是为规一化引进的。

**能量、动量方程** (1-64) 式第一式表示的 $u(p,s)$ 是由(1-

60) 式和 (1-62) 式,加上规一化因子合成的。因而,$u(p,s)$ 和 (1-60) 式一样，是狄拉克方程 (1-57) 式的正能量 $E$、正动量 $\vec{p}$ 的解，描述能量为 $E$、动量为 $\vec{p}$ 的粒子，满足正能量、动量的狄拉克方程

$$(E-\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m)u(p,s)=0。$$

上式左乘 $\beta$，就成为

$$(\gamma\cdot p-m)u(p,s)=0。\tag{1-65}$$

(1-64) 式第二式表示的 $v(p,s)$,是由 (1-61) 式和 (1-62) 式,加上规一化因子,并在 (1-61) 式中以 $-\vec{p}$ 代 $\vec{p}$，组合而成的。因而，$v(p,s)$ 与 (1-61) 式一样，是狄拉克方程的负能量 $-E$ 的解；与 (1-61) 式不同，其动量是 $-\vec{p}$。它描述能量为 $-E$、动量为 $-\vec{p}$ 的粒子,满足负能量、负动量的狄拉克方程

$$(-E+\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m)v(p,s)=0,$$

上式左乘 $\beta$，就成为

$$(-\gamma\cdot p-m)v(p,s)=0。\tag{1-66}$$

**自旋方程** 如 (1-62) 式、(1-63) 式所示，$\chi_1$ 是自旋算符 $\frac{1}{2}\sigma_3$ 的、本征值为 $+\frac{1}{2}$ 的本征函数，描述自旋向上的粒子，$\chi_2$ 是自旋算符 $\frac{1}{2}\sigma_3$ 的、本征值为 $-\frac{1}{2}$ 的本征函数,描述自旋向下的粒子。用 $\chi_s$ $(s=1,2)$ 合成,以 (1-64) 式表示的 $u(p,s)$ 和 $v(p,s)$，由于

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k,\quad (i,j,k=1,2,3)$$

在一般情况下,不是自旋算符 $\frac{1}{2}\sum_3$ 的本征函数。例如

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 u(p,s)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\sigma_3\chi_s\\ \dfrac{\sigma_3\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\sigma_3\chi_s\\ \dfrac{2ip_1\sigma_2-2ip_2\sigma_1+p_3}{E+m}\chi_s\end{pmatrix},\tag{1-67}$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 v(p,s)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\dfrac{\sigma_3\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\\ \sigma_3\chi_s\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\dfrac{2ip_1\sigma_2-2ip_2\sigma_1+p_3}{E+m}\chi_s\\ \sigma_3\chi_s\end{pmatrix},$$

$\chi_s$ 是 $\sigma_3$ 的本征态，但不是 $\sigma_1$、$\sigma_2$ 的本征态。因而，当 $p_1\neq 0$、$p_2\neq 0$ 时，$u(p,s)$、$v(p,s)$ 就不是 $\Sigma_3$ 的本征态。

在粒子静止的坐标系中，$\vec{p}=0$，(1-67) 式成为

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 u(m,s)=\begin{pmatrix}\dfrac{\sigma_3}{2}\chi_s\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 v(m,s)=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{2}\sigma_3\chi_s\end{pmatrix},\tag{1-68}$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 u(m,1)=\frac{1}{2}u(m,1),$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 u(m,2)=-\frac{1}{2}u(m,2),$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_3 v(m,1)=\frac{1}{2}v(m,1),$$

$$\frac{1}{2}\sum_3 v(m,2) = -\frac{1}{2}v(m,2)。$$

这表明：$u(m,1)$、$v(m,1)$ 描述自旋向上的粒子；$u(m,2)$、$v(m,2)$ 描述自旋向下的粒子。

在粒子运动的坐标系中，$\vec{p} \neq 0$。如果坐标系的选取使第三轴与 $\vec{p}$ 平行，那末 (1-67) 式就成为

$$\frac{1}{2}\sum_3 u(p,s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{vmatrix} \sigma_3 \chi_s \\ \frac{p_3}{E+m}\chi_s \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\sum_3 v(p,s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{vmatrix} \frac{p_3}{E+m}\chi_s \\ \sigma_3 \chi_s \end{vmatrix}, \tag{1-69}$$

$$\frac{1}{2}\sum_3 u(p,1) = \frac{1}{2}u(p,1),$$

$$\frac{1}{2}\sum_3 u(p,2) = -\frac{1}{2}u(p,2),$$

$$\frac{1}{2}\sum_3 v(p,1) = \frac{1}{2}v(p,1),$$

$$\frac{1}{2}\sum_3 v(p,2) = -\frac{1}{2}v(p,2)。$$

这表明：在第三轴与粒子动量 $\vec{p}$ 平行的坐标系中，$u(p,1)$ 和 $v(p,1)$ 也描述自旋向上的粒子，$u(p,2)$ 和 $v(p,2)$ 也描述自旋向下的粒子。

由此可知，在粒子静止的坐标系中，或者在第三轴与粒子动量平行的坐标系中，旋量波函数 $u(p,s)$ 和 $v(p,s)$ 都是自旋算符

$\frac{1}{2}\Sigma_3$ 的本征态，所描述的粒子的自旋取向有明确的意义。在一般坐标系中，所描述的粒子的自旋取向就不十分清楚。从相对论观点看来，这样的结果，是不能令人满意的。要想知道进一步的结果，有兴趣的读者，可以参阅卢里著《粒子与场》的第一章1(41)式以下的内容。

**正交、规一、完备性** 对于确定的动量$\vec{p}$，旋量波函数$u(p,s)$和$v(p,s)$，分别描述正能量$E$和负能量$-E$的粒子。对于$s=1$和$s=2$，它们分别描述自旋向上和自旋向下的粒子。正、负能量和向上、向下自旋，共四种状态。描述这四种状态的旋量波函数，是正交、规一化和完备的。

$$\bar{u}(p,s)u(p,s')=\delta_{ss'},$$

$$\bar{v}(p,s)v(p,s')=-\delta_{ss'},$$

$$\bar{v}(p,s)u(p,s')=\bar{u}(p,s)v(p,s')=0; \tag{1-70}$$

$$u^{+}(p,s)u(p,s')=\frac{E}{m}\delta_{ss'},$$

$$v^{+}(p,s)v(p,s')=\frac{E}{m}\delta_{ss'}.$$

$$v^{+}(p,s)u(p_0,-\vec{p},s')=u^{+}(p,s)v(p_0,-\vec{p},s')=0; \tag{1-71}$$

$$\sum_s[u(p,s)\bar{u}(p,s)-v(p,s)\bar{v}(p,s)]=I。 \tag{1-72}$$

(1-70)式是一种正交、规一化表示式，(1-71)式是另一种正交、规一化表示式，(1-72)式是完备性的表示式。它们的正确性，只要把(1-64)式代入就可以证明。例如

$$\overline{u}(p,s)u(p,s') = \frac{E+m}{2m}\begin{vmatrix} \chi_s^+ & -\chi_s^+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \chi_{s'} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_{s'}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{E+m}{2m}\left[\chi_s^+\chi_{s'} - \chi_s^+\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right)^2\chi_{s'}\right]。$$

由于

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \sigma_i\sigma_j p_i p_j = \frac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i)p_i p_j = \delta_{ij}p_i p_j$$

$$= \vec{p}^2 = E^2 - m^2,$$

$$\chi_s^+\chi_{s'} = \delta_{ss'},$$

代入上式，得

$$\overline{u}(p,s)u(p,s') = \frac{E+m}{2m}\left[\delta_{ss'} - \frac{E^2-m^2}{(E+m)^2}\delta_{ss'}\right] = \delta_{ss'}。$$

又例如

$$v^+(p,s)u(p_0,-\vec{p},s') = \frac{E+m}{2m}\begin{vmatrix} \chi_s^+ & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s^+\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \chi_{s'} \\ \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_{s'}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{E+m}{2m}\left[\chi_s^+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_{s'} - \chi_s^+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_{s'}\right] = 0。$$

**自旋求和公式**　在往后的计算中，常常用到如下的、对粒子自旋求和的公式

$$\sum_{s=1}^{2}u(p,s)\overline{u}(p,s) = \frac{\gamma\cdot p+m}{2m}, \tag{1-73}$$

$$\sum_{s=1}^{2}v(p,s)\overline{v}(p,s) = \frac{\gamma\cdot p-m}{2m}. \tag{1-74}$$

把 (1-64) 式代入，可以证明。例如

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\overline{u}(p,s)=\frac{E+m}{2m}\sum_{s}\begin{vmatrix}\chi_s\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\chi_s^+, & -\chi_s^+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{E+m}{2m}\sum_{s}\begin{vmatrix}\chi_s\chi_s^+ & -\chi_s\chi_s^+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\chi_s^+ & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\chi_s^+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\end{vmatrix}。$$

由于

$$\sum_{s}\chi_s\chi_s^+=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\end{vmatrix}=I,$$

所以

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\overline{u}(p,s)=\frac{1}{2m}\begin{vmatrix}E+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E+m\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2m}(\beta E-\vec{\gamma}\cdot\vec{p}+m)=\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}。$$

将 (1-73) 式减去 (1-74) 式，就得到表示完备性的 (1-72) 式。

**旋量时空波函数** 由旋量波函数 $u(p,s)$ 和 $v(p,s)$，与平面波因子 $e^{-ipx}$ 和 $e^{ipx}$，组合成旋量时空波函数

$$\psi_{p,s}(x)=\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)e^{-ipx},\tag{1-75}$$

$$\psi_{-p,-s}(x)=\sqrt{\frac{m}{VE}}v(p,s)e^{ipx}。\tag{1-76}$$

$\sqrt{\frac{m}{VE}}$ 是规一化因子。这种波函数，是狄拉克方程

$$(i\gamma\cdot\partial-m)\psi(x)=0$$

的基本解。实际上

$$(i\gamma\cdot\partial-m)\psi_{p,s}(x)=\sqrt{\frac{m}{VE}}(\gamma\cdot p-m)u(p,s)e^{-ipx}=0,$$

$$(i\gamma\cdot\partial-m)\psi_{-p,s}(x)=\sqrt{\frac{m}{VE}}(-\gamma\cdot p-m)v(p,s)e^{ipx}=0。$$

由(1-75)式、(1-76)式表示的正、负能量，向上、向下的解，也是正交、规一、完备的。

$$\int\psi^{+}_{p,s}(x)\psi_{p,s'}(x)dV=\delta_{s,s'}\delta_{\vec{p},\vec{p}'},$$

$$\int\psi^{+}_{-p,s}(x)\psi_{-p',s'}(x)dV=\delta_{s,s'}\delta_{\vec{p},\vec{p}'},$$

$$\int\psi^{+}_{p,s}(x)\psi_{-E',\vec{p}',s'}(x)dV=\int\psi^{+}_{-E,\vec{p}',s}(x)\psi_{p',s'}(x)=0, \tag{1-77}$$

$$\sum_{s}\int(\psi_{p,s}(x)\psi^{+}_{p,s}(x)+\psi_{-p,s}(x)\psi^{+}_{-p,s}(x))dV=I。 \tag{1-78}$$

它们的证明，也是简单的。例如

$$\int\psi^{+}_{p,s}(x)\psi_{p',s'}(x)dV=\frac{m}{VE}u^{+}(p,s)u(p',s')\int e^{-i(p'-p)x}dV$$

$$=\delta_{s,s'}\delta_{\vec{p},\vec{p}'}。$$

## §5. 中微子波函数

自旋为$\frac{1}{2}$的费米子，有电子、质子、中子、夸克等。它们的质量$m\neq0$，用前两节论述的狄拉克方程和旋量波函数，描写它们的状态和规律。中微子也是自旋为$\frac{1}{2}$的费米子。目前的理

论仍认为：它们没有质量，$m=0$。上一节的旋量波函数，不能用来描写它们的状态。而狄拉克方程

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\vec{\alpha}\cdot\nabla-\beta m\right)\psi(x)=0,$$

只需令 $m=0$，成为

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\vec{\alpha}\cdot\nabla\right)\psi(x)=0, \tag{1-79}$$

就可以用来描述它们的运动规律。

**能量、动量方程** 描述中微子运动规律的狄拉克方程(1-79)式，也有平面波解

$$\psi(x)=\psi(p)e^{\mp ipx}。$$

代入(1-79)式，就得到动量空间的狄拉克方程

$$(E-\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\psi(p)=0, \tag{1-80}$$

也叫做能量、动量方程。$\vec{\alpha}$ 是 $4\times4$ 矩阵，$\psi$ 是 $4\times1$ 矩阵，在标准表示中，取

$$\vec{\alpha}=\begin{vmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{vmatrix},\quad \psi=\begin{vmatrix}\chi\\ \phi\end{vmatrix}, \tag{1-81}$$

(1-80)式可以写成

$$\begin{vmatrix}E, & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}, & E\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\chi\\ \phi\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{aligned}&E\chi-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\phi=0,\\ &-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi+E\phi=0。\end{aligned} \tag{1-82}$$

两式合并，得

$$E^2=(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2=\vec{p}^2,$$

$$E=\pm E_p, \qquad E_p=|\vec{p}|。$$

这表明:(1-82)式有正能解和负能解。当 $E=E_p$ 时,取(1-82)式的第二式

$$\phi=\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p}\chi, \qquad \psi_+(p)=\begin{vmatrix}\chi\\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p}\chi\end{vmatrix}, \tag{1-83}$$

它是中微子的正能解。当 $E=-E_p$ 时,取(1-82)式的第一式

$$\chi=-\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p}\phi, \qquad \psi_-(p)=\begin{vmatrix}-\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p}\chi\\ \chi\end{vmatrix}, \tag{1-84}$$

$\chi$、$\phi$ 都是任意的。在(1-84)式中以 $\chi$ 换 $\phi$ 是允许的。且便于统一讨论。不管是(1-84)式的 $\chi$,还是(1-83)式中的 $\chi$,都是 $2\times1$ 矩阵,都不能由狄拉克方程确定。

**守恒算符** 人们知道,在量子力学中,除规一化系数外,要完全确定一个波函数,需要用到完全的力学量组。表示完全力学量组的算符,是彼此对易的,可以同时对角化。(1-80)式表示的狄拉克方程,可以写成

$$H\psi=E\psi, \qquad H=\vec{\alpha}\cdot\vec{p}$$

(1-83)式、(1-84)式表示的它的解 $\psi_+(p)$、$\psi_-(p)$,是 $H$ 的本征函数。显然,它也是动量 $\vec{p}$ 的本征函数,而 $\vec{p}$ 和 $H$ 是可对易的

$$[H,\vec{p}]=0。$$

和 $H$、$\vec{p}$ 对易的,还有螺旋算符

$$h=\vec{\sigma}\cdot\vec{n},\qquad \vec{n}=\frac{\vec{p}}{E_p},\tag{1-85}$$

$\vec{n}$ 是沿粒子运动方向的单位矢量，$h$ 是粒子自旋在粒子运动方向上的投影。实际上

$$[H,h)=[p_i\alpha_i,n_j\Sigma_j]=p_in_j[\alpha_i,\Sigma_j]$$

$$=p_in_j\left[\begin{vmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\sigma_j & 0\\ 0 & \sigma_j\end{vmatrix}\right]=0,$$

$$[\vec{p},h]=0。$$

再者，手征算符定义为

$$\gamma_5=\gamma^5=-i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,\tag{1-86}$$

和 $H$、$\vec{p}$、$h$ 都可以对易。在标准表示中

$$\gamma^0=\beta=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{vmatrix},\ \vec{\gamma}=\beta\vec{\alpha}=\begin{vmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{vmatrix},\ \gamma_5=\begin{vmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{vmatrix},\tag{1-87}$$

由此可以证明，$\gamma_5$ 与 $H$、$h$ 是可以对易的。于是可知，$H$、$\vec{p}$、$h$、$\gamma_5$ 构成完全的力学量组，可以用来确定中微子的波函数。

**螺旋性** (1-83) 式、(1-84) 式表示的中微子波函数中的 $\chi$，不能用狄拉克方程来确定，可以用螺旋算符来确定。现在，我们就用按 (1-85) 式定义的螺旋算符来确定 $\chi$。首先，由 (1-85) 式

$$h=\vec{\sigma}\cdot\vec{n},\quad h^2=(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^2=n_in_j\sigma_i\sigma_j=\vec{n}^2=1,$$

这表明，$h$ 的本征值为 $\pm1$。用 $\chi_+$ 表示 $h$ 的本征值为 $+1$ 的本征函数，用 $\chi_-$ 表示 $h$ 的本征值为 $-1$ 的本征函数，即令

$$h\chi_+ = \chi_+$$
$$h\chi_- = -\chi_- \tag{1-88}$$

求解上式，就可以得到 $\chi_+$ 和 $\chi_-$。对于 (1-88) 式的第一式，有

$$h = \vec{\sigma}\cdot\vec{n} = \begin{vmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{vmatrix}, \quad \chi_+ = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} n_3 - 1 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 - 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = 0,$$

即
$$(n_3 - 1)a + (n_1 - in_2)b = 0,$$
$$(n_1 + in_2)a - (n_3 + 1)b = 0。$$

由此可取

$$b = \frac{n_1 + in_2}{n_3 + 1}a, \qquad \chi_+ = \begin{vmatrix} a \\ \dfrac{n_1 + in_2}{n_3 + 1}a \end{vmatrix}。$$

将 $\chi_+$ 规一化，令

$$\chi_+^+\chi_+ = \begin{vmatrix} a^* & \dfrac{n_1 - in_2}{n_3 + 1}a^* \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ \dfrac{n_1 + in_2}{n_3 + 1}a \end{vmatrix}$$

$$= a^*a\left(1 + \frac{n_1^2 + n_2^2}{(n_3 + 1)^2}\right) = 1,$$

得

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n_3 + 1}, \qquad \chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2(n_3 + 1)}}\begin{vmatrix} n_3 + 1 \\ n_1 + in_2 \end{vmatrix}。 \tag{1-89}$$

用同样的方法，由 (1-88) 式的第二式可得

$$\chi_- = \frac{1}{\sqrt{2(n_3 + 1)}}\begin{vmatrix} -n_1 + in_2 \\ n_3 + 1 \end{vmatrix}。 \tag{1-90}$$

用 (1-89) 式表示的 $\chi_+$，是粒子的右旋波函数，粒子的自旋与运动方向平行；用 (1-90) 式表示的 $\chi_-$，是粒子的左旋波函数，粒

子的自旋与运动方向相反。

**旋量波函数** 把(1-83)式、(1-84)式表示的能量、动量波函数，和(1-89)式，(1-90)式表示的自旋波函数结合起来，就得到旋量波函数

$$u(p,r)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\chi_r\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,\chi_r\end{vmatrix}, \tag{1-91}$$

$$v(p,r)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,\chi_r\\ \chi_r\end{vmatrix}。 \tag{1-92}$$

$u(p,r)$ 是粒子能量为 $|\vec{p}|$、动量为 $\vec{p}$ 的波函数；$v(p,\gamma)$ 是粒子能量为 $-|\vec{p}|$、动量为 $-\vec{p}$ 的波函数，满足狄拉克方程

$$\begin{aligned}\gamma\cdot pu(p,r)&=0,\\ -\gamma\cdot pv(p,r)&=0。\end{aligned} \tag{1-93}$$

$r=+$ 时，粒子是右旋的；$r=-$ 时，粒子是左旋的，

$$\begin{aligned}hu(p,+)&=u(p,+),\\ hv(p,+)&=v(p,+),\\ hu(p,-)&=-u(p,-),\\ hv(p,-)&=-v(p,-)。\end{aligned} \tag{1-94}$$

**手征性** 由(1-86)式定义的 $\gamma_5$ 算符，是与$H$、$\vec{p}$、$h$ 可以对易的。因而，由(1-91)式，(1-92)式表示的旋量波函数，也应该是 $\gamma_5$ 的本征函数。实际上，

$$\begin{aligned}\gamma_5 u(p,+)&=\begin{vmatrix}0&-1\\-1&0\end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\chi_+\\ \chi_+\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\chi_+\\ \chi_+\end{vmatrix}\\ &=-u(p,+),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_5 v(p,-)&=\begin{vmatrix}0&-1\\-1&0\end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}-\chi_-\\ \chi_-\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}-\chi_-\\ \chi_-\end{vmatrix}\\ &=v(p,-),\end{aligned}$$

故有

$$
\begin{aligned}
\gamma_5 u(p,+) &= -u(p,+),\\
\gamma_5 u(p,-) &= u(p,-),\\
\gamma_5 v(p,+) &= -v(p,+),\\
\gamma_5 v(p,-) &= v(p,-)
\end{aligned}
\tag{1-95}
$$

表示旋量波函数的手征性质。由 (1-94) 式和 (1-95) 式可知：$r=+$的右旋状态是负手征的；$r=-$的左旋状态是正手征的。

**正交、规一、完备性**　由(1-91)式、(1-92)式表示的旋量波函数，或者说满足方程 (1-93)式、(1-94)式、(1-95) 式的波函数,是正交、规一、完备的。

$$
\begin{aligned}
&u^+(p,r)u(p,r') = \delta_{r,r'},\\
&v^+(p,r)v(p,r') = \delta_{r,r'},\\
&u^+(p,r)v(p_0,-\vec{p},r') = v^+(p_0,-\vec{p},r)u(p,r') = 0,
\end{aligned}
\tag{1-96}
$$

$$
\sum_r [u(p,r)u^+(p,r) + v(p_0,-\vec{p},r)v^+(p_0,-\vec{p},r)] = I。\tag{1-97}
$$

由于 $v(p,r)$ 描述能量为$-|\vec{p}|$、动量为$-\vec{p}$的粒子，$v(p_0, -\vec{p},r)$ 描述能量为$-|\vec{p}|$、动量为$\vec{p}$ 的粒子，(1-96) 式、(1-97) 式表示动量为$\vec{p}$的粒子,正、负能量和左、右自旋四种不同状态的正交、规一、完备性。其证明,例如

$$
\sum_r [u(p,r)u^+(p,r) + v(p_0,-\vec{p},r)v^+(p_0,-\vec{p},r)]
$$

$$
= \frac{1}{2}\sum_r \begin{vmatrix} \chi_r \\ \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,\chi_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi_r^+, \chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \frac{1}{2}\sum_r \begin{vmatrix} -\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,\chi_r \\ \\ \chi_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n}, \chi_r^+ \end{vmatrix}
$$

$$= \frac{1}{2}\sum_r \begin{vmatrix} \chi_r\chi_r^+ & \chi_r\chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n}\chi_r\chi_r^+ & \vec{\sigma}\cdot\vec{n}\chi_r\chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_r \begin{vmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{n}\chi_r\chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\chi_r\chi_r^+ \\ -\chi_r\chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n} & \chi_r\chi_r^+ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \vec{\sigma}\cdot\vec{n} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{n} & 1 \end{vmatrix} = I。$$

**自旋求和** 在往后的计算中，也要用到对自旋平均或求和的公式

$$\sum_r u(p,r)\overline{u}(p,r) = \frac{\gamma\cdot p}{2E},$$

$$\sum_r v(p,r)\overline{v}(p,r) = \frac{\gamma\cdot p}{2E}。\tag{1-98}$$

把(1-91)式、(1-92)式代入，就可以证明上式。例如

$$\sum_r u(p,r)\overline{u}(p,r) = \sum_r \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \chi_r \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,\chi_r \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \chi_r^+ & -\chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_r \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \chi_r\chi_r^+ & -\chi_r\chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n}\chi_r\chi_r^+ & -\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,\chi_r\chi_r^+\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\beta-\vec{\alpha}\cdot\vec{n})$$

$$= \frac{1}{2E}(\beta E - \vec{\alpha}\cdot\vec{n}\,E) = \frac{1}{2E}(\beta E - \vec{\alpha}\cdot\vec{p})$$

$$= \frac{\gamma\cdot p}{2E}。$$

**旋量时空波函数** 把旋量波函数(1-91)式、(1-92)式，加上平面波因子和规一化系数，就构成旋量时空波函数

$$\psi_{p,r}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}u(p,r)e^{-ipx},$$

$$\psi_{-p,r}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}v(p,r)e^{ipx}。\tag{1-99}$$

它描写的粒子，具有一定的能量、动量和自旋，是狄拉克方程和螺旋性方程

$$i\gamma\cdot\partial\psi_p(x)=0$$

$$h\psi_\pm(x)=\pm\psi_\pm(x)\tag{1-100}$$

的基本解。对于确定的动量$\vec{p}$，它们也是正交、规一、完备的，

$$\int\psi^+_{p,r}(x)\psi_{p,r'}(x)dV=\delta_{r,r'},$$

$$\int\psi^+_{-p,r}(x)\psi_{-p,r'}(x)dV=\delta_{r,r'},$$

$$\int\psi^+_{p,r}(x)\psi_{-p_0,\vec{p},r'}(x)dV=0,$$

$$\int\psi^+_{-p_0,\vec{p},r}(x)\psi_{p,r}(x)dV=0,\tag{1-101}$$

$$\sum_r\left[\int\psi^+_{p,r}(x)\psi_{p,r}(x)\,dV+\int\psi^+_{-p_0,\vec{p},r}(x)\psi_{-p_0,\vec{p},r}(x)dV\right]=I,\tag{1-102}$$

其证明也是简单的。例如

$$\int\psi^+_{p,r}(x)\psi_{-p_0',\vec{p}',r'}(x)\,dV$$

$$=\frac{1}{V}\int dV u^+(p,r)v(p_0',-\vec{p}',r')e^{+i(p_0+p_0')t-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}$$

$$=u^+(p,r)v(p_0',-\vec{p}',r')e^{i(p_0+p_0')t}\frac{1}{V}\int e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}dV,$$

在周期边界条件下

$$\frac{1}{V}\int e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}\,dV=\delta_{\vec{p},\vec{p}'},$$

再根据正交、规一化条件 (1-96) 式的第三式

$$u^{+}(p,r)v(p_0,-\vec{p},r')=0,$$

就证明了 (1-101) 式的第三式的正确性。

## §6. 麦克斯韦方程

人们对电磁场的认识，先于量子力学和相对论。1873 年，麦克斯韦 Maxwell 在总结前人成果的基础上，提出了完整的电磁场理论——麦克斯韦方程。人们对它进行了系统的研究和应用，开创了电磁世界的纪元。1905 年，爱因斯坦建立了狭义相对论，阐明了麦克斯韦方程是相对论性的波动方程。量子化后，它就是描写光子的场方程。

**场强方程** 在电磁学和电动力学中，人们用电场强度 $\vec{E}(x)$ 和磁感应强度 $\vec{B}(x)$ 描述电磁场。它们由洛仑兹力公式

$$\vec{f}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B} \tag{1-103}$$

定义。它们运动变化的规律，由麦克斯韦方程

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{E}=0,\\&\nabla\times\vec{E}=-\dot{\vec{B}},\\&\nabla\cdot\vec{B}=0,\\&\nabla\times\vec{B}=\dot{\vec{E}}\end{aligned} \tag{1-104}$$

表征。式中，没有电荷和电流，是自由电磁场。

**势方程** (1-104) 式的第三式，不管是自由场，还是非自由场，都是如此。矢量分析告诉我们，任何矢量旋度的散度恒等于

零。因而，按

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1-105}$$

引入矢势 $\vec{A}$，(1-104) 式的第三式自然满足。(1-104) 式的第二式，也是既适用于自由场，又适用于相互作用场。而任何标量梯度的旋度总是零。把 (1-105) 式代入 (1-104) 式的第二式，得

$$\nabla \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0,$$

由此，可以引入标势 $\phi$

$$\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\nabla\phi, \tag{1-106}$$

(1-104) 式的第二式也自然成立。把 (1-105) 式、(1-106) 式代入 (1-104) 式的第一式和第四式，就得到标势 $\phi$ 和矢势 $\vec{A}$ 应该满足的麦克斯韦方程

$$\nabla^2\phi + \nabla \cdot \dot{\vec{A}} = 0, \tag{1-107}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \nabla\nabla \cdot \vec{A} = \nabla\dot{\phi} + \ddot{\vec{A}}$$

**四维形式** 麦克斯韦方程是相对论性的波动方程，可以写成四维的协变形式。首先，我们把标势 $\phi$ 和矢势 $\vec{A}$，看作四维逆变矢量 $A^\mu (\mu = 0,1,2,3)$ 的分量

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \tag{1-108}$$

四维协变矢量势 $A_\mu (\mu = 0,1,2,3)$ 定义为

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (\phi, -\vec{A})。 \tag{1-109}$$

考虑到时空导数也构成四维矢量

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right),$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),$$

势的麦克斯韦方程（1-107）式就可以写成

$$\partial^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}=0。\tag{1-110}$$

电场强度$\vec{E}$、磁感应强度$\vec{B}$，由（1-105）式、（1-106）式与矢势$\vec{A}$、标势$\phi$联系。这种联系，可以用四维矢势$A_{\mu}$的四维旋度表示出来，即令

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu},\tag{1-111}$$

把它看作是（1-105）式、（1-106）式的四维表达式，就可以推出四维场强$F_{\mu\nu}(x)$和三维场强$\vec{E}(x)$、$\vec{B}(x)$的关系。由（1-111）式表示的$F_{\mu\nu}$是四维反对称张量，$F_{\mu\nu}=-F_{\mu\nu}$，有六个独立的分量，正好是$\vec{E}$、$\vec{B}$的六个分量。

$$F_{i\sigma}=\partial_{i}A_{\sigma}-\partial_{\sigma}A_{i}=\partial_{i}\phi+\dot{A}^{i}=-E^{i},$$

$$F_{ij}=\partial_{i}A_{j}-\partial_{j}A_{i}=\partial_{j}A^{i}-\partial_{i}A^{j}=-\varepsilon_{ijk}B^{k},$$

其对应关系是

$$\begin{aligned}F_{0i}&=E^{i},\\F_{ij}&=-\varepsilon_{ijk}B^{k}。\end{aligned}\tag{1-112}$$

**规范不变性** 在电磁学和电动力学中，由洛仑兹力如（1-103）式定义的$\vec{E}$和$\vec{B}$，被认为是基本的，而由（1-105）式、（1-106）式引入的$\vec{A}$和$\phi$是辅助的。因而，由（1-112）式与$\vec{B}$、$\vec{E}$联系的$F_{\mu\nu}$是基本的，$A_{\mu}$是按（1-111）式由$F_{\mu\nu}$定义的。可以证明，对于给定的$F_{\mu\nu}(x)$，按（1-111）式定义的$A_{\mu}(x)$不是唯一的。实际上，作一规范变换

$$A_{\mu}\to A'_{\mu}=A_{\mu}+\partial_{\mu}\Lambda,\tag{1-113}$$

$\Lambda(x)$是任意的可导的时间函数。在这变换下

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\to F'_{\mu\nu}&=\partial_{\mu}A'_{\nu}-\partial_{\nu}A'_{\mu}\\&=\partial_{\mu}(A_{\nu}+\partial_{\nu}\Lambda)-\partial_{\nu}(A_{\mu}+\partial_{\mu}\Lambda)\\&=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu},\end{aligned}$$

即电磁场强$F_{\mu\nu}$是不变的

$$F_{\mu\nu}\to F'_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}。\tag{1-114}$$

在这变换下，电磁势的场方程（1-110）式也是不变的

$$\partial^{\nu}\partial_{\nu}A'^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}A'^{\nu}=\partial^{\nu}\partial_{\nu}A'^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}=0。$$

把（1-111）式代入（1-110）式，得到电磁场强的方程

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu}=0\tag{1-115}$$

也是不变的。这种在规范变换（1-113）式的变换下，场强和场方程不变的性质，叫做规范不变性。电磁场的这种规范不变性是十分重要的。

电磁场的规范不变性，给我们以选择规范的自由。较常选用的规范，有库仑规范和洛仑兹规范。

在库仑规范中，在自由场的情况下，令

$$A_0=0,\quad \nabla\cdot\vec{A}=0,\tag{1-116}$$

势的麦克斯韦方程（1-110）式为

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\vec{A}=0。\tag{1-117}$$

在洛仑兹规范中，令

$$\partial^{\mu}A_{\mu}=0,\tag{1-118}$$

势方程（1-110）式为

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}A_{\nu}=0。\tag{1-119}$$

**平面波解** 不管是库仑规范中的麦克斯韦方程（1-117）式，还是洛仑兹规范中的麦克斯韦方程（1-119）式，都是波动方程，都有平面波解

$$\vec{A}^{+}(x)=\vec{A}(k)e^{-ik\cdot x},\quad \vec{A}^{-}(x)=\vec{A}(k)e^{ik\cdot x},\tag{1-120}$$

$$A_{\mu}^{+}(x)=A_{\mu}(k)e^{-ik\cdot x},\quad A_{\mu}^{-}(x)=A_{\mu}(k)e^{ik\cdot x}。$$

＋号和－号角标分别表示正频解和负频解。把它们分别代入（1-117）式、（1-119）式，都得到

$$k^2=0。\tag{1-121}$$

这就是波动方程对其频率 $\omega$ 和波矢 $\vec{k}$ 所加的要求

$$k_0 = \pm\omega, \quad \omega = |\vec{k}|,$$

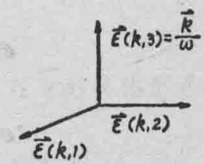
往后，(1-120) 中的 $k$，理解为 $k^\mu = (\omega, \vec{k})$。

电磁势 $\vec{A}(x)$ 或 $A_\mu(x)$，除了必需满足麦克斯韦方程 (1-117) 式或 (1-119) 式外，还必需满足规范条件(1-116)式或 (1-118) 式。把 (1-120) 式代入 (1-116) 式或 (1-118) 式，得到

$$\vec{k} \cdot \vec{A}(k) = 0,$$
$$k^\mu A_\mu(k) = 0。 \qquad (1-122)$$

这是动量空间的势需要满足的库仑规范条件或洛仑兹规范条件。

**三维极化矢量** 在三维空间存在三个线性独立的矢量。为了满足库仑规范条件的需要，我们选择三个相互正交的三个单位矢量：$\vec{\varepsilon}(k,1)$、$\vec{\varepsilon}(k,2)$、$\vec{\varepsilon}(k,3)$。如右图所示：$\vec{\varepsilon}(k,3)$ 与 $\vec{k}$ 平行；$\vec{\varepsilon}(k,1)$、$\vec{\varepsilon}(k,2)$ 与 $\vec{k}$ 垂直，




而且彼此正交。换句话说，它们是正交、规一化的，用方程式

$$\vec{\varepsilon}(k,\lambda) \cdot \vec{\varepsilon}(k,\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \ (\lambda, \lambda' = 1,2,3) \qquad (1-123)$$

表示。三维空间有、且仅有三个正交、规一化的矢量，因而，它们也是完备的，满足方程

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k,\lambda) = \delta^{ij}。(i,j = 1,2,3) \qquad (1-124)$$

显然，上述三个线性独立的单位矢量 $\vec{\varepsilon}(k,\lambda)$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ 中，只有两个 $\vec{\varepsilon}(k,\lambda)$ $(\lambda = 1,2)$ 满足库仑规范条件

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}(k,\lambda) = 0, \ (\lambda = 1,2) \qquad (1-125)$$

可以用来描写电磁场或光子的极化状态，因而叫做极化矢量。$\vec{\varepsilon}(k,\lambda)$ $(\lambda = 1,2)$ 与 $\vec{k}$ 垂直叫做横极化矢量，表征电磁波的横波

性质。$\vec{\varepsilon}(k,3)$ 与 $\vec{k}$ 平行，叫做纵极化矢量。在往后的计算中，常常要用到对光子两种极化求和的公式，由（1-124）式推出，为

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon^{i}(k,\lambda)\,\varepsilon^{j}(k,\lambda)=\delta^{ij}-\frac{k^{i}k^{j}}{\vec{k}^{2}} \tag{1-126}$$

**四维极化矢量** 在四维空间存在四个线性独立的矢量。为了满足洛仑兹规范条件（1-122）式第二式的需要，我们将上述的三个三维极化矢量，扩充为四维极化矢量，再加上一个只有时间分量的四维矢量 $\eta_{\mu}=(1,\vec{0})$，组成四个四维极化矢量

$$\begin{aligned}
e^{\mu}(k,1)&=(0,\ \vec{\varepsilon}(k,1)),\\
e^{\mu}(k,2)&=(0,\ \vec{\varepsilon}(k,2)),\\
e^{\mu}(k,3)&=\frac{k^{\mu}-\eta^{\mu}(k\cdot\eta)}{(k\cdot\eta)},\\
e^{\mu}(k,4)&=i\eta^{\mu}=(i,\ \vec{0})。
\end{aligned} \tag{1-127}$$

它们是以 $\vec{k}$ 为基准，且以特殊的形式定义的，如 $\eta^{\mu}=(1,\vec{0})$，故无协变性质。

可以直接证明，它们也是正交、规一、完备的。

$$e^{\mu}(k,\lambda)e_{\mu}(k,\lambda')=-\delta_{\lambda,\lambda'},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{4}e_{\mu}(k,\lambda)e_{\nu}(k,\lambda)=-g_{\mu\nu}, \tag{1-128}$$

满足洛仑兹条件的，只有 $\lambda=1,2$ 两个

$$k_{\mu}e^{\mu}(k,\lambda)=0,\ (\lambda=1,2) \tag{1-129}$$

这两个极化矢量 $e_{\mu}(k,\lambda)$，$(\lambda=1,2)$，叫横向极化矢量；$e_{\mu}(k,3)$ 叫纵极化矢量；$e_{\mu}(k,4)$ 叫标量极化矢量。实际观察到的光子，只有横向极化的，用 $e_{\mu}(k,\lambda)$ $(\lambda=1,2)$ 描述。有时，我们要对这两种极化求和，由（1-127）式、（1-128）式可以推知

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e^{\mu}(k,\lambda)e^{\nu}(k,\lambda) = -g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{(k\cdot\eta)^2} + \frac{k^{\mu}\eta^{\nu}+\eta^{\mu}k^{\nu}}{(k\cdot\eta)}。 \tag{1-130}$$

**极化时空波函数** 把上述的极化矢量和平面波因子，加上规一化系数，就构成具有一定能量、动量和极化的时空波函数

$$\vec{A}^{\pm}_{k,\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\vec{\varepsilon}(k,\lambda)e^{\mp ik\cdot x}, \tag{1-131}$$

$$A^{\mu\,\pm}_{k,\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e^{\mu}(k,\lambda)e^{\mp ik\cdot x}。$$

它们是麦克斯韦方程的基本解，而且是正交、规一、完备的。

## 习 题 一

1. 试写出：周期边界条件 $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}'}$ 对 $\vec{k}$ 的具体形式提出的要求。

2. 证明：在标准表示中，(1-36) 式表示的 $\alpha_i$、$\beta$ 满足 (1-32) 式的要求。

3. 试由 (1-36) 式导出 (1-43) 式，并证明它满足 (1-41) 式。

4. 试在标准表示中，用 (1-64) 式直接证明 (1-65) 式和 (1-66) 式。

5. 试用 (1-70) 式和狄拉克方程证明 (1-71) 式。

6. 证明旋量时空波函数的完备性 (1-78) 式和 (1-102) 式。

7. 证明：哈密顿算符 $H$、螺旋算符 $h$、手征算符 $\gamma_5$，是彼此对易的。

8. 证明：(1-90) 式表示的波函数是左旋的。

9. 证明：中微子波函数满足 (1-93) 式、(1-94) 式和

(1-96) 式。

10. 证明：库仑规范条件和洛仑兹规范条件都是可以实现的。

11. 证明光子极化求和公式 (1-130) 式。

12. 导出由 (1-131) 式表示的极化时空波函数的正交、规一、完备性表示式。

# 第二章　拉格朗日形式和对称性

牛顿（Newton）力学，由拉格朗日（Lagrange）、哈密顿（Hamilton）等人总结发展为分析力学。它以抽象的数学形式，表述物理规律。由于它的抽象性，初学者不易理解。也正是由于它的抽象性，便于把它推广应用于其它部门。实际上，现在它已成为描写各种基本物理规律的一种理论体系。分析力学有拉格朗日形式和哈密顿形式。现在的场论，多用拉格朗日形式描述，故称之为拉格朗日场论。

## §1. 拉格朗日方程

在拉格朗日力学中，描写力学系统的基本参量是广义坐标 $q_i(t)$ 和广义速度 $\dot{q}_i(t)$。它们都是时间 $t$ 的函数，$i=1, 2, \cdots n$。$n$ 是该系统的自由度数。描写力学系统的基本函数，由广义坐标 $q_i(t)$ 和广义速度 $\dot{q}_i(t)$ 构成，用 $L(q_i, \dot{q}_i)$ 表示，叫做拉格朗日函数。对拉格朗日函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$ 取时间积分，定义为作用量

$$A=\int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt, \tag{2-1}$$

它是广义坐标 $q_i(t)$ 和广义速度 $\dot{q}_i(t)$ 的泛函。

**作用量原理**　力学系统的运动规律，按作用量的极值原理进行。这原理，在 1834 年由哈密顿提出，故也称哈密顿原理。这原理用变分方法表述为：当广义坐标和广义速度作任意变化 $\delta q_i(t)$、$\delta\dot{q}_i(t)$，但在积分限上不变 $\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=\delta\dot{q}_i(t_1)$

$=\delta\dot{q}_i(t_2)=0$ 时，作用量取极值 $\delta A=0$，便是力学系统运动应该遵循的规律。

**拉格朗日方程** 按照上述原理，可以导出力学系统的运动方程。对（2-1）式取变分、取极值

$$\delta A=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_i(t),\dot{q}_i(t)dt=0。$$

由于积分限不变，上式为

$$\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(q_i(t),\dot{q}_i(t))dt=0,$$

$\delta L$ 的变化是由 $\delta q_i(t)$、$\delta\dot{q}_i(t)$ 引起的，故

$$\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt=0。$$

第二项，由分部积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i dt=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i dt,$$

由于 $\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0$，上式第一项为零。所以

$$\delta A=\int_{t_1}^{t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i dt=0。$$

$\delta q_i$ 是任意的，故上式成立的条件是其被积函数为零，即

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=0,\qquad(2-2)$$

这就是力学系统的运动方程，叫做拉格朗日方程。

对于不同的力学系统，描写它们的广义坐标 $q_i(t)$ 和广义速

度 $\dot{q}_i(t)$ 有不同的意义。由广义坐标、广义速度构成的拉格朗日函数 $L(q_i,\dot{q}_i)$ 有不同的形式。因而，由（2-2）式导出的运动方程，也有它具体的特点。构造拉格朗日函数，是物理理论的基本课题。在力学中，对于在势场 $V(q_i)$ 中作低速运动的粒子，其拉格朗日函数

$$L=T-V, \tag{2-3}$$

$T$ 是动能 $\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{q}_i^2$。代入（2-2）式，得

$$m_i\ddot{q}_i=-\frac{\partial V}{\partial q_i}=f_i, \tag{2-4}$$

这就是人所共知的牛顿第二定律。

**场的拉格朗日方程** 描写力学系统的基本参量 $q_i(t)$、$\dot{q}_i(t)$，只是时间 $t$ 的函数。由它们构成的 $L(q_i,\dot{q}_i)$，也只是时间的函数。描写场的基本参量是场量 $\phi_\alpha(x)$，$\alpha=1,2,\cdots,n$。$\alpha$ 是表示不同场或场的不同分量的指标。它们不只是时间 $t$ 的函数，也是空间坐标 $\vec{x}$ 的函数，$\phi_\alpha(t,\vec{x})$。力学中的广义坐标 $q_i(t)$，只能是时间 $t$ 的函数，$i=1,2,\cdots,n$ 是系统的自由度的指标。作为时空函数的场量 $\phi_\alpha(t,\vec{x})$，如果把坐标 $\vec{x}$ 看作自由度指标，它就也只是时间 $t$ 的函数，也可以看作广义坐标。由这观点看来，由于 $\vec{x}$ 是连续变化的，在空间有无穷多个坐标点。所以，场有无穷多个自由度，或者说场是有无穷多个自由度的力学系统。既然 $\phi_\alpha(t,\vec{x})$ 是以 $\vec{x}$ 标志自由度的广义坐标，那末 $\dot{\phi}_\alpha(t,\vec{x})$ 就是以 $\vec{x}$ 标志自由度的广义速度。这种论述，旨在从力学的观点来阐明 $\phi_\alpha(x)$ 的意义。然而，从相对论的观点来看，时间 $t$ 和空间 $\vec{x}$ 是平等的，是同一个四维矢量的不同分量。所以，我们把 $\phi_\alpha(x)$ 叫做广义坐标，$\dot{\phi}_\alpha(x)$ 叫做广义速度。$\phi_\alpha(x)$ 的空间导数 $\nabla\phi_\alpha(x)$，与 $\dot{\phi}_\alpha(x)$ 在有些方面也要同等看待。

在力学中，我们用$q_i(t)$、$\dot{q}_i(t)$构成$L(q_i, \dot{q}_i)$。基于上述原因，在场论里，我们就用$\phi_\alpha(x)$、$\partial_\mu\phi_\alpha(x)$构成$\mathscr{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu\phi_\alpha)$。$\mathscr{L}$不仅是时间的函数，也是空间的函数，叫做拉格朗日密度。$\mathscr{L}$对空间的积分，就是拉格朗日函数

$$L = \int \mathscr{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu\phi_\alpha) d^3x, \tag{2-5}$$

再对时间$t$积分，就是场的作用量

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_\Omega \mathscr{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu\phi_\alpha) d^4x, \tag{2-6}$$

$\Omega$是四维时空空间的体积。

作用量原理推广到场的情况，就是：场量及其导数作任意变化$\delta\phi_\alpha(x)$，$\delta\partial_\mu\phi_\alpha(x)$，但在积分体积$\Omega$的边界$\sigma$上不变时，作用量取极值$\delta A = 0$，便是场的运动规律。由这个极值原理，就可以导出场的运动方程。实际上

$$\delta A = \int_\Omega \delta\mathscr{L} d^4x = \int_\Omega \left( \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha} \delta\partial_\mu\phi_\alpha \right) d^4x = 0,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha} \partial_\mu\delta\phi_\alpha d^4x = \int_\Omega \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha \right) d^4x -$$

$$\int_\Omega \partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha d^4x,$$

$$\int_\Omega \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha \right) d^4x = \oint_\sigma \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha d\sigma_\mu = 0,$$

$$\int_\Omega \left( \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha} \right) \delta\phi_\alpha d^4x = 0。$$

由于 $\delta\phi_\alpha$ 是任意的，积分体积 $\Omega$ 也是任意给定的，上式成立的充要条件是

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\alpha} = 0, \tag{2-7}$$

这就是场的拉格朗日方程。

**拉格朗日密度** 在拉格朗日场论中，场的拉格朗日密度具有重要的意义。描写场的基本参量是场量 $\phi_\alpha(x)$ 及其导数 $\partial_\mu\phi_\alpha(x)$，拉格朗日密度是由它们构成的函数 $\mathscr{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu\phi_\alpha)$。对于具体的场，求得了它的具体形式，把它代入 (2-7) 式，就可以得到描述该场运动的具体的方程。反之，如果已知场的具体的运动方程，与 (2-7) 式比较，就可以推知该场的拉格朗日密度。

在第一章中，我们得到了自由场的克莱因-戈登方程(1-20)式、狄拉克方程 (1-39) 式、麦克斯韦方程 (1-110) 式

$$\begin{aligned} &(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0, \\ &(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \\ &\partial^\mu\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu\partial^\mu A_\mu = 0。 \end{aligned} \tag{2-8}$$

把它们和 (2-7) 式比较，就可以得到这三种自由场的拉格朗日密度

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_\phi = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi, \\ &\mathscr{L}_\psi = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \\ &\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)。 \end{aligned} \tag{2-9}$$

把 (2-9) 式代入 (2-7) 式，就可以证明它们是正确的。例如

$$\frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial A_\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial \partial_\rho A} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial \partial_\rho A_\lambda}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\right](\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$-\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\frac{\partial}{\partial \partial A_\lambda}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\delta_{\rho\mu}\delta_{\lambda\nu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\lambda\mu})$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial^\rho A^\lambda - \partial^\lambda A^\rho - \partial^\lambda A^\rho + \partial^\rho A^\lambda) = -(\partial^\rho A^\lambda - \partial^\lambda A^\rho)$$

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial \partial^\rho A_\lambda} = -\partial_\rho(\partial^\rho A^\lambda - \partial^\lambda A^\rho),$$

代入(2-7)式，就得到(2-8)式的第三式

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0。$$

## §2. 诺依率尔定理

对称性是物体或空间的几何性质。如物体或空间的球对称、轴对称、平面对称等。对称性具有不可区分性或不变性的意义。例如，球对称的物体，球面上的点是不可区分的，在空间的转动下是不变的。因此，可以用不变性来定量描写对称性。对称概念起源于人们对所居处的空间的理解。现在，人们推广这个概念，使它不仅适用于所居处的实三维空间，也适用于四维的时空空间和 $n$ 维的抽象空间。人们经过长期的研究，进一步认识到：对称性、不变性和守恒定律有紧密的联系。诺依率尔(Noether)定理指出：对于可以用连续变换不变性来描述的对称性，总有一条守恒定律和它相联系。对称性、不变性、守恒定律常常是三位一体的，是物理学中基本的、重要的观念。时空空间是均匀的、各向同性的，有平移不变性、洛仑兹不变性、反射反演不变性，还有电荷共轭。与此相应，存在能量、动量守恒、角动量守恒，宇称守恒等定律。时空空间以外的抽象空间，如味道空间、颜色空间，叫做内部空间。在内部空间，也有对称性、不变性，也有与之相应的守恒定律。例如电荷守恒、重子数守恒、轻子数守恒，就是味道空间具有的对称性、不变性的结果。

**变换**　为了定量地描述对称性、不变性，我们先给变换以明

确的定义。设想时空空间有某种变化，用时空坐标表示为

$$x^{\mu}\to x'^{\mu}=x^{\mu}+\delta x^{\mu}, \tag{2-10}$$

$\delta x^{\mu}$ 表示该变换下的时空的无穷小变化。对于不同的变换，它有不同的具体形式。与此相应，描写场的场量 $\phi_{\alpha}(x)$，也要发生变化

$$\phi_{\alpha}(x)\to\phi'_{\alpha}(x')=\phi_{\alpha}(x)+S_{\alpha\beta}\phi_{\beta}(x), \tag{2-11}$$

$S_{\alpha\beta}$ 应该是与 $\delta x^{\mu}$ 成比例的无穷小量，当然也和场的性质有关。由 $\phi_{\alpha}(x)$ 变成 $\phi'_{\alpha}(x')$，包含两重变换：一是由场的性质确定的变换 $\phi_{\alpha}(x)\to\phi'_{\alpha}(x)$，叫做本征变换；一是由时空变数引起的变换 $\phi_{\alpha}(x)\to\phi_{\alpha}(x')$，叫做函数变换。对于本征变换，其变化为

$$\delta\phi_{\alpha}(x)=\phi'_{\alpha}(x)-\phi_{\alpha}(x), \tag{2-12}$$

将 (2-11) 式中的时空坐标 $x\to x-\delta x$，就得到

$$\begin{aligned}\phi'_{\alpha}(x)&=\phi_{\alpha}(x-\delta x)+S_{\alpha\beta}\phi_{\beta}(x-\delta x)\\&=\phi_{\alpha}(x)-\delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x)+S_{\alpha\beta}\phi_{\beta}(x)+O(\delta x_{\mu}^{2}),\end{aligned}$$

限于一级无穷小量，就是

$$\delta\phi_{\alpha}(x)=-\delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x)+S_{\alpha\beta}\phi_{\beta}(x)。 \tag{2-13}$$

在时空坐标和场量的变换下，由场量构成的函数拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi_{\alpha}(x),\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x))$，由场量构成的泛函作用量 $A=\int\mathscr{L}d^{4}x$，也要发生变化

$$\mathscr{L}(\phi_{\alpha}(x),\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x))\to\mathscr{L}'(\phi'_{\alpha}(x'),\partial'_{\mu}\phi'_{\alpha}(x')),$$

$$A=\int_{\Omega}\mathscr{L}(\phi_{\alpha}(x),\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x))d^{4}x\to$$

$$A'=\int_{\Omega'}\mathscr{L}'(\phi'_{\alpha}(x'),\partial'_{\mu}\phi'_{\alpha}(x')d^{4}x'。$$

**不变性** 在上述变换下，如果作用量不变

$$A'=A,$$

$$\int_{\Omega'} \mathscr{L}'(\phi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \phi'_\alpha(x'))d^4x' = \int_{\Omega} \mathscr{L}(\phi\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x))d^4x, \tag{2-14}$$

我们就说，这个理论具有在这种变换下的不变性。或者说这个理论具有这种对称性。作用量不变，由它导出的运动方程就不变。这意味着：在这种变换下，物理规律不变，物理规律具有对称性。

在上述变换下，如果时空坐标变换的行列式为

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = 1, \quad d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x = d^4x,$$

那末，作用量不变，(2-14) 式就成为

$$\int_{\Omega'} \mathscr{L}'(\phi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \phi'_\alpha(x')d^4x' = \int_{\Omega} \mathscr{L}'(\phi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \phi'_\alpha(x'))$$

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x = \int_{\Omega} \mathscr{L}'(\phi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \phi'_\alpha(x')d^4x$$

$$= \int_{\Omega} \mathscr{L}(\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_x(x))d^4x。$$

人们认为：在物理上要求的变换下，作为场量函数的拉格朗日密度的函数形式是不变的，即

$$\mathscr{L}'(\phi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \phi'_\alpha(x')) = \mathscr{L}(\phi'_\alpha(x'), \partial_\mu \phi'_\alpha(x'))$$

由上式推知

$$\mathscr{L}(\phi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \phi'_\alpha(x')) = \mathscr{L}(\phi_\alpha(x), \partial_\mu \phi_\alpha(x)), \tag{2-15}$$

它与作用量不变、运动方程不变等价。由此可知，在一定变换下，理论的不变性、对称性，可以用作用量不变、运动方程不变或拉格朗日密度不变来描述。

**守恒定律** 在上述变换下，如果理论是不变的、对称的，就存在相应的守恒定律。这就是诺依率尔定理的内容。我们用 (2-10) 式、(2-12) 式表示的变换，用 (2-15) 式表示的不变性、

对称性，来证明这个定理。由（2-15）式，得

$$\mathscr{L}(\phi'_\alpha(x),\partial'_\mu\phi'_\alpha(x))-\mathscr{L}(\phi_\alpha(x-\delta x),\partial_\mu\phi_\alpha(x-\delta x))=0,$$

$$-\mathscr{L}(\phi_\alpha(x),\partial_\mu\phi_\alpha(x))+\mathscr{L}(\phi_\alpha(x),\partial_\mu\phi_\alpha(x))=0,$$

两式相加，得

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\partial_\mu\phi_\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu=0。$$

考虑到场的拉格朗日方程（2-7）式，上式可以写成

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\ \delta\phi_\alpha+g^{\mu\nu}\mathscr{L}\delta x_\nu\right)=0, \tag{2-16}$$

这就是表示守恒定律的连续性方程。

**守恒流和守恒量** 在第一章中我们就强调指出了连续性方程表示的物理意义

$$\partial_\mu j^\mu=0,\ Q=\int j^0(x)d^3x,$$

$\partial_\mu j^\mu=0$ 表示守恒定律，$j^\mu(x)$ 表示守恒流，$Q$ 表示守恒量。与（2-16）式相比可知：在用$\delta x^\mu$、$\delta\phi_\alpha(x)$表示的对称变换下，（2-16）式表示守恒定律，相应的守恒流是

$$j^\mu(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha(x)}\delta\phi_\alpha(x)+\mathscr{L}\delta x^\mu, \tag{2-17}$$

相应的守恒量是

$$Q=\int j^0(x)d^3x,\ j^0(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha(x)}\delta\phi_\alpha(x)+\mathscr{L}\delta t。 \tag{2-18}$$

当然，对于不同的理论有不同的$\mathscr{L}$，对于不同的对称变换有不同的 $\delta x^\mu$ 和 $\delta\phi_\alpha(x)$。因而，相应的守恒定律、守恒流和守恒量，就有不同的具体形式。

## §3．时空均匀性和能量、动量

人们认为：时空空间是均匀的。在时空空间任一点发生的规

律，都是相同的。时空的均匀性，用时空平移不变性表征。与之相应的守恒定律，是能量守恒和动量守恒。我们根据诺依率尔定理，按照 (2-17) 式和 (2-18) 式，来导出用场量 $\phi_\alpha(x)$ 表示的、守恒的能量和动量。

**时空平移** 我们定义时空平移为

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu, \quad \delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \tag{2-19}$$

$\varepsilon^\mu$ 是四维无穷小矢量，是与时空坐标无关的任意常数。人们认为时空是均匀的，在时空平移下拉格朗日密度不变

$$\mathscr{L}(\phi'_\alpha(x'), \partial'_\mu\phi'_\alpha(x')) = \mathscr{L}(\phi_\alpha(x), \partial_\mu\phi_\alpha(x))。 \tag{2-20}$$

在时空平移下，时空导数是不变的，由 (2-19) 式知

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \delta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu,$$

(2-20) 式就成为

$$\mathscr{L}(\phi'_\alpha(x'), \partial_\mu\phi'_\alpha(x')) = \mathscr{L}(\phi_\alpha(x), \partial_\mu\phi_\alpha(x))。$$

这要求：在平移变换下，场量 $\phi_\alpha(x)$ 的变换为

$$\phi_\alpha(x) \to \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x), \tag{2-21}$$

$$\phi'_\alpha(x) = \phi_\alpha(x - \delta x) = \phi_\alpha(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi_\alpha(x),$$

其本征变化为

$$\delta\phi_\alpha(x) = \phi'_\alpha(x) - \phi_\alpha(x) = -\varepsilon^\mu\partial_\mu\phi_\alpha(x)。 \tag{2-22}$$

**能、动张量流** 时空平移变换用 (2-19) 式、(2-22) 式表示。时空平移变换是对称变换，如 (2-20) 式所示。按照洛依率尔定理，应有相应的守恒流和守恒量。把 (2-19) 式、(2-22)式代入 (2-17) 式，得

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}(-\varepsilon^\nu\partial_\nu\phi_\alpha) + \mathscr{L}\varepsilon^\mu$$

$$= -\varepsilon_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\partial^\nu\phi_\alpha - g^{\mu\nu}\mathscr{L}\right),$$

去掉任意因子，就得到守恒的张量流

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\partial^\nu\phi_\alpha-g^{\mu\nu}\mathscr{L}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu}=0, \qquad (2-23)$$

我们把它叫做场的能量、动量张量，简称能、动张量。

**能量和动量** 按照（2-18）式，守恒量是

$$p^\nu=\int T^{0\nu}d^3x, \quad \dot{p}^\nu=0。$$

把（2-23）式代入，就得到守恒的能量和动量

$$H=p^0=\int\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\dot{\phi}_\alpha-\mathscr{L}\right)d^3x,$$

$$(2-24)$$

$$\vec{p}=-\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\nabla\phi_\alpha d^3x。$$

对于不同的场，有不同的场量 $\phi_\alpha(x)$；对于不同的理论，$\mathscr{L}$ 有不同的函数形式。把它们代入（2-24）式，就可以得到该理论描述的场的能量和动量。

**克莱因-戈登场** 对于复标量场，场量是 $\phi(x)$ 和 $\phi^*(x)$，拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-m^2\phi^*\phi,$$

其导数为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}=\partial_\mu\phi^*, \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}=\partial^\mu\phi, \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}^*, \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^*}=\dot{\phi},$$

代入（2-23）式、（2-24）式，就得到该场的能、动张量流，以及能量和动量

$$T^{\mu\nu}=\partial^\mu\phi^*\partial^\nu\phi+\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi^*-g^{\mu\nu}(\partial^\lambda\phi^*\partial_\lambda\phi-m^2\phi^*\phi),$$

$$H=\int(\dot{\phi}^*\dot{\phi}+\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi+m^2\phi^*\phi)d^3x,$$

$$(2-25)$$

$$\vec{p}=-\int(\dot{\phi}^*\nabla\phi+\dot{\phi}\nabla\phi^*)d^3x。$$

**狄拉克场** 场量是 $\psi(x)$，拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}=\overline{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi,$$

在时空平移下

$$\delta x^{\mu}=\varepsilon^{\mu},\partial'_{\mu}=\partial_{\mu},\psi'(x')=\psi(x)$$

$\mathscr{L}$不变。$\mathscr{L}$的导数为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi}=\overline{\psi}i\gamma^{\mu},\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\psi^{+},$$

代入(2-23)式、(2-24)式，就得到狄拉克场的能、动张量和能量、动量

$$T^{\mu\nu}=\overline{\psi}i\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi-g^{\mu\nu}\overline{\psi}(i\gamma^{\lambda}\partial_{\lambda}-m)\psi,$$

$$H=\int\psi^{+}(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi d^{3}x, \tag{2-26}$$

$$\vec{p}=-i\int\psi^{+}\nabla\psi d^{3}x。$$

**库仑规范电磁场** 电磁场用电磁势 $A^{\mu}(x)$ 描述。在库仑规范下，$A^{0}=0,\nabla\cdot\vec{A}=0$，其拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu})$$

$$=-\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}+\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}$$

$$=-\frac{1}{2}\partial_{i}A_{j}\partial^{i}A^{j}+\frac{1}{2}\partial_{i}A_{j}\partial^{j}A^{i}$$

$$-\frac{1}{2}\partial_{0}A_{i}\partial^{0}A^{i}-\frac{1}{2}\partial_{i}A_{0}\partial^{i}A^{0}$$

$$+\frac{1}{2}\partial_{0}A_{i}\partial^{i}A^{0}+\frac{1}{2}\partial_{i}A_{0}\partial^{0}A^{i},$$

$$\partial_{i}A_{j}\partial^{j}A^{i}=\partial_{i}(A_{j}\partial^{j}A^{i})-A_{j}\partial^{j}\partial_{i}A^{i},$$

考虑到 $A^{0}=0,\partial_{i}A^{i}=0$,

$$\int \partial_i(A_j\partial^i A^j)d^3x=\int \nabla\cdot(A_j\partial^i\vec{A})d^3x=\oint A_j\partial^i\vec{A}\cdot d\vec{S}=0。$$

对能量、动量有贡献的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_i A_j\partial^i A^j-\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i, \tag{2-27}$$

其导数为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i}=-\dot{A}^i, \tag{2-28}$$

把 (2-27) 式、(2-28) 式代入(2-24) 式，就得到库仑规范下电磁场的能量、动量

$$H=\int(-\dot{A}^iA_i-\mathscr{L})d^3x=\frac{1}{2}\int(-\dot{A}^i\dot{A}_i+\partial_iA_j\partial^iA^j)d^3x,$$

$$H=\frac{1}{2}\int(\dot{\vec{A}}\cdot\dot{\vec{A}}+\nabla A^i\cdot\nabla A^i)d^3x,$$

$$\tag{2-29}$$

$$\vec{p}=-\int-\dot{A}^i\nabla A_id^3x=-\int\dot{A}^i\nabla A^id^3x。$$

**洛仑兹规范电磁场**　洛仑兹规范条件是

$$\partial_\mu A^\mu=0,$$

电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu,$$

$$\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu=\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu)-A_\nu\partial^\nu\partial_\mu A^\mu,$$

由于洛仑兹条件，第二项为 0，而

$$\int\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu)d^4x=\oint A_\nu\partial^\nu A^\mu\cdot d\sigma_\mu=0$$

对作用量无贡献。实际上，$\mathscr{L}$ 中包含的四维散度项，都对作用量无贡献，都可以除去。所以，洛仑兹规范下电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu,$$

(2-30)

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu。$$

代入(2-24)式，就得到场的能量、动量

$$H = \int(-\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L})d^3x,$$

$$H = -\frac{1}{2}\int(\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \nabla A^\mu \cdot \nabla A_\mu)d^3x,$$

(2-31)

$$\vec{p} = -\int -\dot{A}_\mu \nabla A^\mu d^3x = \int \dot{A}^\mu \nabla A_\mu d^3x。$$

## §4. 洛仑兹变换和角动量

时空空间不仅是均匀的，而且是各向同性的。沿时空空间任何方向的物理规律是相同的。时空空间的各向同性，用四维空间的转动不变性来描写，用洛仑兹变换下的不变性来描写。三维空间是四维时空空间的子空间。三维空间的转动，是四维空间转动、洛仑兹变换的特例。三维空间的各向同性、转动不变性，导致角动量守恒。由于时空空间的各向同性，描述场的拉格朗日密度$\mathscr{L}$，在洛仑兹变换下是不变的。这里，我们就要根据第一节给定的自由场的拉格朗日密度的不变性，来确定场的洛仑兹变换规律，讨论场的角动量，特别是它们的自旋。

**洛仑兹变换** 时空空间的洛仑兹变换，是线性变换

$$x^\mu \to x'^\mu = a^{\mu\nu} x_\nu, \tag{2-32}$$

是保持长度不变

$$x'^\mu x'_\mu = x^\nu x_\nu \tag{2-33}$$

的线性变换。$a^{\mu\nu}$ 是与时空坐标无关的变换系数、把 (2-32) 式代入 (2-33) 式，得

$$x'^{\mu}x'_{\mu} = a^{\mu\nu}x_{\nu}a_{\mu\lambda}x^{\lambda} = a_{\mu\lambda}a^{\mu\nu}x^{\lambda}x_{\nu} = x^{\nu}x_{\nu},$$

这要求

$$a_{\mu\lambda}a^{\mu\nu} = g^{\nu}_{\lambda}, \tag{2-34}$$

它是洛仑兹变换系数要满足的条件。所以，我们可以把 (2-32) 式和 (2-34) 式看作洛仑兹变换的定义。

在洛仑兹变换下，描写场的基本参量 $\phi_{\alpha}(x)$，也要作相应的线性变换

$$\phi_{\alpha}(x) \to \phi'_{\alpha}(x') = \Lambda_{\alpha\beta}(a)\phi_{\beta}(x), \tag{2-35}$$

变换系数 $\Lambda_{\alpha\beta}(a)$ 不仅与系数 $a_{\mu\nu}$ 有关，也和场的性质有关，但不是场量 $\phi_{\alpha}(x)$ 的函数。由 $\phi_{\alpha}(x)$ 变成 $\phi'_{\alpha}(x')$ 包括两重变换，本征变换和变数变换。本征变换的变化是

$$\phi'_{\alpha}(x) - \phi_{\alpha}(x) = \Lambda_{\alpha\beta}(a)\phi_{\beta}(x - \Delta x) - \phi_{\alpha}(x)。 \tag{2-36}$$

**无穷小变换** 无穷小的洛仑兹变换定义为

$$a^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu}, \tag{2-37}$$

$\varepsilon^{\mu\nu}$ 是无穷小量。把 (2-37) 式代入 (2-34) 式，得

$$(g^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu})(g_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\mu\lambda}) = g^{\nu}_{\lambda},$$

$$g^{\nu}_{\lambda} + g^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\lambda} + g_{\mu\lambda}\varepsilon^{\mu\nu} = g^{\nu}_{\lambda},$$

$$\varepsilon^{\nu}_{\lambda} + \varepsilon^{\nu}_{\lambda} = 0,$$

$$\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}, \tag{2-38}$$

$\varepsilon^{\mu\nu}$ 是无穷小的反对称张量，有六个分量。把 (2-37) 式代入 (2-32)式，得时空坐标变换为

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu\nu}x_{\nu},$$

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu}x_{\nu}, \tag{2-39}$$

(2-38) 式、(2-39)式可以看作无穷小洛仑兹变换的定义。

在无穷小洛仑兹变换下，场量的变换也应该是无穷小的，其系数可以写成

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\varepsilon)=\delta_{\alpha\beta}-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta} \tag{2-40}$$

无穷小变换指与恒等变换差一无穷小量的变换。$\delta_{\alpha\beta}$ 表示恒等变换部分。无穷小量部分与 $\varepsilon^{\mu\nu}$ 成正比，$-\frac{i}{2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 是比例系数。$-\frac{i}{2}$的引入，会使 $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 具有明显的物理意义，由场的性质确定。把(2-40)式代入(2-36)式，得

$$\begin{aligned}\phi'_\alpha(x)-\phi_\alpha(x)&=(\delta_{\alpha\beta}-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta})\phi_\beta(x-\delta x)-\phi_\alpha(x)\\&=\phi_\alpha(x-\delta x)-\phi_\alpha(x)-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\phi_\beta(x-\delta x)\\&=-\delta x^\mu\partial_\mu\phi_\alpha(x)-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\phi_\beta(x)\\&=-\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu\phi_\alpha(x)-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\phi_\beta(x)\\&=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)\phi_\alpha(x)-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\phi_\beta(x)\\&=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}[(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)\delta_{\alpha\beta}-iS_{\mu\nu,\alpha\beta}]\phi_\beta(x),\end{aligned}$$

由此可知，在无穷小洛仑兹变换下，场量的本征变换为

$$\delta\phi_\alpha(x)=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}[(x^\mu\partial^\nu-x^\nu\partial^\mu)\delta_{\alpha\beta}-iS^{\mu\nu}_{\alpha\beta}]\phi_\beta(x)。\tag{2-41}$$

**守恒量和守恒流**　时空空间是各向同性的，在洛仑兹变换下拉格朗日密度是不变的，存在相应的守恒量和守恒流。把(2-39)式、(2-41)式代入(2-17)式、(2-18)式

$$j^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha+\mathscr{L}\delta x^\mu,\quad Q=\int\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\delta\phi_\alpha+\mathscr{L}\delta t\right)d^3x,$$

就可以得到相应的守恒量和守恒流。实际上

$$j^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\lambda}[(x^\nu\partial^\lambda-x^\lambda\partial^\nu)\delta_{\alpha\beta}-iS^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}]\phi_\beta+\mathscr{L}\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu,$$

$$\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu=g^{\mu\lambda}\varepsilon_{\lambda\nu}x^\nu=g^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\lambda}x^\lambda,$$

$$\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu=\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\lambda}(g^{\mu\nu}x^\lambda-g^{\mu\lambda}x^\nu),$$

$$j^\mu=\frac{\varepsilon_{\nu\lambda}}{2}\left\{x^\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\partial^\lambda\phi_\alpha-g^{\mu\lambda}\mathscr{L}\right)-x^\lambda\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\partial^\nu\phi_\alpha-g^{\mu\nu}\mathscr{L}\right)\right.$$

$$\left.-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}\phi_\beta\right\},$$

圆括号内是（2-23）式表示的能、动张量，故

$$j^\mu=\frac{\varepsilon_{\nu\lambda}}{2}\left\{x^\nu T^{\mu\lambda}-x^\lambda T^{\mu\nu}-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}\phi_\beta\right\},$$

去除常数任意因子，就得到守恒的张量流

$$M^{\mu,\nu\lambda}=x^\nu T^{\mu\lambda}-x^\lambda T^{\mu\nu}-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}\phi_\beta,\partial_\mu M^{\mu,\nu\lambda}=0。\quad(2\text{-}42)$$

守恒量就是

$$J^{\nu\lambda}=\int M^{0,\nu\lambda}d^3x=\int\left(x^\nu T^{0\lambda}-x^\lambda T^{0\nu}-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}\phi_\beta\right)d^3x,\quad(2\text{-}43)$$

它是四维的角动量。

**自旋角动量** 当 $\nu$、$\lambda=1,2,3$ 时，用 $i$、$j=1,2,3$ 表示，上式中的

$$J^{ij}=\int\left(x^iT^{0j}-x^jT^{0i}-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}S^{ij}_{\alpha\beta}\phi_\beta\right)d^3x\quad(2\text{-}44)$$

就是场的三维角动量。实际上，$T^{0i}$ 是场的动量密度，

$$x^iT^{0j}-x^jT^{0i}$$

就是场的轨道角动量密度，所以

$$S^{ij}=-i\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}S^{ij}_{\alpha\beta}\phi_\beta d^3x\quad(2\text{-}45)$$

就是场的自旋角动量，就是相应粒子的自旋。

将表示场的本征变换的 (2-41) 式中的方括号乘以 $i$，得

$$x^\mu i\partial^\nu - x^\nu i\partial^\mu + S^{\mu\nu},$$

取空间分量

$$x^i i\partial^j - x^j i\partial^i + S^{ij},$$

$p^i = i\partial^i$ 是动量算符，$x^i p^j - p^j x^i$ 是轨道角动量算符。显然，以与轨道角动量相加的形式，出现在守恒量中的 $S^{ij}$ 当然也是角动量。所以，$S^{ij}_{\alpha\beta}$ 是由场粒子自旋决定的算符。换句话说，它是场粒子的自旋算符。这和 (2-45) 式解释为场的自旋角动量的意义是一致的。由此可知，我们可以根据场量 $\phi_\alpha(x)$ 在洛仑兹变换下的性质，如 (2-35) 式、(2-40) 式所示，来推测场粒子的自旋。

**克莱因-戈登场** 有实场和复场两类。实场描述中性粒子，复场描述有荷粒子。实场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

复场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi。$$

在洛仑兹变换下，时空坐标及其导数的变换为

$$x^\mu \to x'^\mu = a^{\mu\nu}x_\nu,$$

$$a_{\mu\lambda}x'^\mu = a_{\mu\lambda}a^{\mu\nu}x_\nu = g^\nu_\lambda x_\nu = x_\nu,$$

$$\partial_\mu \to \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'^\mu}\ \frac{\partial}{\partial x_\lambda} = a_{\mu\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\lambda} = a_{\mu\lambda}\partial^\lambda,$$

$$\partial'^\mu = a^{\mu\nu}\partial_\nu,$$

$$\partial'^\mu\partial'_\mu = a^{\mu\nu}\partial_\nu a_{\mu\lambda}\partial^\lambda = \partial^\nu\partial_\nu, \tag{2-46}$$

场量的变换为

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \Lambda(a)\phi(x)。$$

在无穷小变换下，

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu},$$

$$\Lambda(\varepsilon)=1-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\text{。}$$

人们认为，在洛仑兹变换下，不管是实场还是复场，它们的拉格朗日密度$\mathscr{L}$应该是不变的。这要求

$$\begin{aligned}
&\phi(x)\phi(x)\rightarrow\phi'(x')\phi'(x')=\phi(x)\phi(x),\\
&\Lambda^2\phi(x)\phi(x)=\phi(x)\phi(x),\\
&\Lambda=1,\\
&S_{\mu\nu}=0\text{。}
\end{aligned}\tag{2-47}$$

这意味着：场量 $\phi(x)$ 在洛仑兹变换下是不变的

$$\phi(x)\rightarrow\phi'(x')=\phi(x),\tag{2-48}$$

场的自旋为零。所以，我们说克莱因-戈登场是标量场，场粒子的自旋为零。这个结论，也适用于复标量场。

**电磁场** 其拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu),$$

在洛仑兹变换下，

$$\begin{aligned}
&x^\mu\rightarrow x'^\mu=a^{\mu\nu}x_\nu\\
&\partial_\mu\rightarrow\partial'_\mu=a_{\mu\nu}\partial^\nu,
\end{aligned}$$

电磁势 $A_\mu(x)$ 是四维矢量，有如时空坐标一样的变换性质

$$A_\mu(x)\rightarrow A'_\mu(x')=a_{\mu\nu}A^\nu(x)\text{。}\tag{2-49}$$

在这样的变换下，其拉格朗日密度是不变的

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)&\rightarrow(\partial'_\mu A'_\nu-\partial'_\nu A'_\mu)(\partial'^\mu A'^\nu\\
&\quad-\partial'^\nu A'^\mu)\\
&=(a_{\mu\nu}\partial^\lambda a_{\nu\rho}A^\rho-a_{\nu\rho}\partial^\rho a_{\mu\lambda}A^\lambda)(a^{\mu\alpha}\partial_\alpha a^{\nu\beta}A_\beta\\
&\quad-a^{\nu\beta}\partial_\beta a^{\mu\alpha}A_\alpha)\\
&=a_{\mu\lambda}a^{\mu\alpha}a_{\nu\rho}a^{\nu\beta}(\partial^\lambda A^\rho-\partial^\rho A^\lambda)(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)\\
&=g^\alpha_\lambda g^\beta_\rho(\partial^\lambda A^\rho-\partial^\rho A^\lambda)(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)\\
&=(\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)\text{。}
\end{aligned}$$

另一方面，按 (2-35) 式的规定，电磁势的变换，可以写成

$$A_\mu(x) \to A_\mu'(x') = \Lambda_{\mu\nu}(a) A^\nu(x) \tag{2-50}$$

的统一形式。在无穷小变换下

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu},$$

$$\Lambda_{\mu\nu}(\varepsilon) = g_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta,\mu\nu},$$

(2-49) 式和 (2-50) 式是同一个方程的两种表示，所以

$$\Lambda_{\mu\nu}(a) = a_{\mu\nu},$$

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta,\mu\nu}。 \tag{2-51}$$

这就是电磁场自旋算符 $S_{\alpha\beta,\mu\nu}$ 应该满足的方程，其解为

$$S_{\alpha\beta,\mu\nu} = i(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu})。 \tag{2-52}$$

把 $S_{\alpha\beta}$ 看作矩阵，$\mu$ 是它的行指标，$\nu$ 是它的列指标，自旋算符 (2-52) 式就可写成矩阵

$$S_{01} = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, S_{02} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, S_{03} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{2-53}$$

$$S_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, S_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, S_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{vmatrix}。$$

$S_{12}$、$S_{23}$、$S_{31}$是空间分量，是空间的自旋算符，写成 $3\times 3$ 矩阵，就是

$$S' = S_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, \quad S^2 = S_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S^3 = S_{12} = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{S}^2 = S_{23}^2 + S_{31}^2 + S_{12}^2 = 2 = 1\cdot(1+1)。\qquad (2\text{-}54)$$

这表明：电磁场相应的光子的自旋是1。所以，我们说电磁场是自旋为1的矢量场。

**狄拉克场** 其拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi,$$

在洛仑兹变换下，

$$x^\mu \to x'^\mu = a^{\mu\nu}x_\nu,$$

$$\partial_\mu \to \partial'_\mu = a_{\mu\nu}\partial^\nu,$$

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \Lambda(a)\psi(x), \qquad (2\text{-}55)$$

$\Lambda(a)$ 是与 $a_{\mu\nu}$ 有关的 $4\times4$ 矩阵，有待确定。共轭旋量的变换，由（2-55）式推出

$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}'(x') = \psi'^+(x')\gamma_0 = \overline{\psi}(x)\gamma_0\Lambda^+(a)\gamma_0。\qquad (2\text{-}56)$$

我们根据自由场在洛仑兹变换下不变的要求，来确定 $\Lambda(a)$，即要求

$$\overline{\psi}'(x')(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(x),$$

把（2-55）式、（2-56）式代入，得

$$\overline{\psi}(x)\gamma_0\Lambda^+\gamma_0(i\gamma^\mu a_{\mu\nu}\partial^\nu - m)\Lambda\psi(x) = \overline{\psi}(x)(i\gamma_\nu\partial^\nu - m)\psi(x)。$$

由含 $m$ 的项相等，要求

$$\gamma_0\Lambda^+\gamma_0\Lambda = 1,$$

$$\gamma_0\Lambda^+\gamma_0 = \Lambda^{-1}。\qquad (2\text{-}57)$$

由含导数的项相等，要求

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda a_{\mu\nu} = \gamma_\nu,$$

乘以 $a^{\lambda\nu}$，利用 $a_{\mu\nu}a^{\lambda\nu} = g_\mu^\lambda$，得

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda = a_{\mu\nu}\gamma^\nu。\tag{2-58}$$

(2-57) 式、(2-58) 式就是狄拉克场作洛仑兹变换

$$\psi(x)\to\psi'(x') = \Lambda\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\tag{2-59}$$

的 4×4 矩阵 $\Lambda$ 应该满足的方程。

在无穷小变换下，

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu},$$

(2-60)

$$\Lambda = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu},$$

如前所述，$S_{\mu\nu}$是自旋算符。把上式代入 (2-57)式、(2-58) 式，得

$$\gamma^0 S^+_{\alpha\beta}\gamma^0 = S_{\alpha\beta},$$

(2-61)

$$-\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \varepsilon^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}] = \varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu,$$

这就是自旋算符 $S_{\alpha\beta}$ 应该满足的矩阵方程，其解为

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta],\tag{2-62}$$

它们是六个 4×4 矩阵。其中三个

$$S_{oi} = \frac{i}{2}\gamma_o\gamma_i$$

与惯性坐标系相对运动的洛仑兹变换有关。另三个

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{ij} = \varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{vmatrix}\tag{2-63}$$

就是普通意义下的、狄拉克场的自旋算符。它的形式和第一章得到的一样，但导出它所依据的理论思维，却是不同的。不同

的理论思维，对同一个问题得到相同的结论，这是正确的自然科学理论所要求的。(2-62)式再一次表明：狄拉克场粒子是自旋为$\frac{1}{2}$的费米子。

## §5. PCT变换和PCT定理

时空空间的均匀性和各向同性，用连续变换的不变性来描述。与此相应，有能量、动量、角动量等守恒定律。这些守恒定律是严格的守恒定律，是任何物理过程都必需遵从的。时空空间还有一些用不连续变换描写的对称性：空间反射和宇称守恒；时间反演不变；电荷共轭和正、反粒子对称。这些不变性、对称性不是严格的，相应的守恒定律也不是严格的。有的相互作用过程遵守这些守恒定律，也有的相互作用过程不遵守。但是，人们认为：自由场具有最大的对称性，遵守任何守恒定律。我们正是根据这一点，来确定场量、场算符在各种对称变换下的变换规律。前几节，我们是这样作的。在这一节中，我们也如此行事。

**空间反射** 其定义为

$$\vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x}, \quad t \to t' = t,$$

空间坐标方向反转，时间坐标不变。在这变换下，场量也要发生相应的变化。

克莱因-戈登场只有一个场量。它们是复的或者是实的。它们的拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi,$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2。$$

在空间反射下，场量的变换为

$$\phi(\vec{x},t) \to \phi'(-\vec{x},t) = \eta_p \phi(\vec{x},t)。$$

拉格朗日密度不变要求

$$\phi'(-\vec{x},t)\phi'(-\vec{x},t)=\phi(\vec{x},t)\phi(\vec{x},t),$$

$$\eta_p^2=1,$$

$$\eta_p=\pm 1,$$

场量的本征变换为

$$\phi(\vec{x},t)\to\phi'(\vec{x},t)=\pm\phi(-\vec{x},t)。\tag{2-64}$$

$\eta_p=\pm 1$ 是场的宇称：$\eta_p=+1$ 叫正宇称，$\eta_p=-1$ 叫负宇称。场的宇称由场的性质，根据实验确定。$\pi$ 介子场和 $k$ 介子场的宇称都是负的。

电磁场势 $A_\mu(x)$ 是四维矢量。在洛仑兹变换下，如同四维时空矢量$x_\mu$ 一样地变换。在空间反射下，也和时空矢量一样变换

$$\vec{A}(\vec{x},t)\to\vec{A}'(-\vec{x},t)=-\vec{A}(\vec{x},t),\tag{2-65}$$

$$A_0(\vec{x},t)\to A_0'(-\vec{x},t)=A_0(\vec{x},t),$$

这种推测是正确的。电磁场的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$$

在这变换下是不变的。

狄拉克场 $\psi(x)$ 是 $4\times 1$ 矩阵。在空间反射下，作线性变换

$$\psi(\vec{x},t)\to\psi'(-\vec{x},t)=\eta_p P\psi(\vec{x},t)$$

$\eta_p$ 是数，$P$是 $4\times 4$ 矩阵。其具体的数值或形式，由拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi$$

不变的要求来确定，即要求

$$\bar{\psi}'(-\vec{x},t)(i\gamma^0\partial_0-i\vec{\gamma}\cdot\nabla-m)\psi'(-\vec{x},t)$$

$$=|\eta_p|^2\bar{\psi}(\vec{x},t)\gamma_0P^\dagger\gamma_0(i\gamma^0\partial_0-i\vec{\gamma}\cdot\nabla-m)P\psi(\vec{x},t)$$

$$=\bar{\psi}(\vec{x},t)\,(i\gamma^0\partial_0+i\vec{\gamma}\cdot\nabla-m)\psi(\vec{x},t),$$

由含 $\partial_0$ 项的相等，推知

$$\gamma_0 P^+ P=\gamma_0,$$
$$P^+=P^{-1}。\tag{2-66}$$

由含 $m$ 项的相等，推知

$$\gamma_0 P^+\gamma_0 P=1,$$
$$\gamma_0 P^+\gamma_0=P^{-1}。\tag{2-67}$$

由含 $\nabla$ 项的相等，推知

$$P^{-1}\vec{\gamma}P=-\vec{\gamma}。\tag{2-68}$$

(2-66) 式、(2-67) 式、(2-68)式是矩阵$P$应该满足的矩阵方程。显然，方程的解是

$$P=\gamma_0。\tag{2-69}$$

当然，相因子$\eta_p$应该是

$$|\eta_p|^2=1,\quad \eta_p=\pm1,\pm i。\tag{2-70}$$

通常认为：核子的 $\eta_p=+1$ 是正宇称，其它粒子的宇称 $\eta=\pm1$ 由实验确定。综上所述，狄拉克场的空间反射为

$$\psi(\vec{x},t)\to\psi'(\vec{x},t)=\pm\gamma_0\psi(-\vec{x},t),$$
$$\tag{2-71}$$
$$\bar{\psi}(\vec{x},t)\to\bar{\psi}(\vec{x},t)=\pm\bar{\psi}(\vec{x},t)\gamma_0。$$

**电荷共轭变换** 这是把场量变成它的共轭场量的变换。由于 $PCT$ 定理，把它和空间反射、时间反演联系起来，因而也算作一种不连续的时空变换。

克莱因-戈登场的电荷共轭变换定义为

$$\phi(x)\to\phi^C(x)=\eta_C\phi^*(x),\tag{2-72}$$
$$\phi^*(x)\to\phi^{*C}(x)=\eta_C^*\phi(x),$$

其拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-m^2\phi^*\phi$$

不变，要求

$$|\eta_C|^2=1。$$

令 $\eta_C=1$，则

$$\phi(x)\to\phi^C(x)=\phi^*(x)。\tag{2-73}$$

如第一章所示，克莱因-戈登场方程为

$$(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi(x)=0。$$

如果考虑它与电磁场的相互作用，则上述方程改成

$$(\partial_\mu-ieA_\mu)(\partial^\mu-ieA^\mu)\phi(x)+m^2\phi(x)=0,\tag{2-74}$$

取复共轭得

$$(\partial_\mu+ieA_\mu)(\partial^\mu+ieA^\mu)\phi^*(x)+m^2\phi^*(x)=0。$$

把 (2-73) 式代入，得

$$(\partial_\mu+ieA_\mu)(\partial^\mu+ieA^\mu)\phi^C(x)+m^2\phi^C(x)=0。\tag{2-75}$$

比较 (2-74) 式、(2-75) 式知：$\phi(x)$ 和 $\phi^C(x)$ 的差别，在于电荷 $e$ 的符号。$\phi(x)$ 描述电荷为 $e$ 的场粒子，则 $\phi^C(x)=\phi^*(x)$ 描述电荷为 $-e$ 的场粒子。所以，(2-73) 式定义的变换叫做电荷共轭变换，又叫做正、反粒子变换。

狄拉克场量 $\psi$ 的共轭量为 $\overline{\psi}$。其电荷共轭变换定义为

$$\psi\to\psi^C=C\tilde{\overline{\psi}}=C\gamma_0\tilde{\psi}^+,\tag{2-76}$$

$C$ 是 4×4矩阵。由此推知

$$\overline{\psi}\to\overline{\psi}^C=\psi^{+C}\gamma_0=\tilde{\psi}\gamma_0C^+\gamma_0。\tag{2-77}$$

$C$ 的具体形式，可以由 $\psi$、$\psi^C$ 满足的方程相互共轭来确定。为此，我们写下它们在给定电磁场 $A_\mu(x)$ 中的运动方程

$$\begin{aligned}&i\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)\psi-m\psi=0,\\&i\gamma^\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)\psi^C-m\psi^C=0,\end{aligned}\tag{2-78}$$

它们的差别在于它们所带电荷符号不同。把 (2-76) 式代入 (2-78) 式的第二式，得

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)C\tilde{\overline{\psi}}-mC\tilde{\overline{\psi}}=0,$$

$$\bar{\psi}\,\tilde{C}i\tilde{\gamma}^{\mu}(\overleftarrow{\partial}_{\mu}+ieA_{\mu})-m\,\bar{\psi}\,\tilde{C}=0。\tag{2-79}$$

对（2-78）式的第一式取轭米共轭，得

$$-i\psi^{+}\gamma^{\mu+}(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})-m\psi^{+}=0,$$

$$\bar{\psi}i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})+m\bar{\psi}=0。\tag{2-80}$$

将（2-79）式右乘 $C^{-1}$，再与（2-80）式比较。由含 $m$ 项相等，要求

$$-\tilde{C}C^{-1}=1,$$

$$\tilde{C}=-C。\tag{2-81}$$

由含 $\gamma$ 项相等，要求

$$\tilde{C}\tilde{\gamma}_{\mu}C^{-1}=\gamma_{\mu},$$

$$C^{-1}\gamma_{\mu}C=-\tilde{\gamma}_{\mu}。\tag{2-82}$$

共轭是相互的。与（2-76）式、（2-77）式相应，有

$$\psi^{C}\to\psi=C\tilde{\bar{\psi}}^{C},$$

$$\tag{2-83}$$

$$\bar{\psi}^{C}\to\bar{\psi}=\tilde{\psi}^{C}\gamma_{0}C^{+}\gamma_{0}。$$

由（2-76）式得

$$\tilde{\bar{\psi}}=C^{-1}\psi^{C},$$

$$\bar{\psi}=\tilde{\psi}^{C}\tilde{C}^{-1}。$$

与（2-83）式第二式比较，并考虑到（2-81）式，得

$$\gamma_{0}C^{+}\gamma_{0}=-C^{-1}。\tag{2-84}$$

考虑到 $\tilde{\gamma}_{0}=\gamma_{0}$、（2-82）式和上式，得

$$C^{-1}\gamma_{0}=-\gamma_{0}C^{-1},$$

$$C^{-1}\gamma_{0}=-\gamma_{0}C^{+},$$

$$C^{+}=C^{-1}。\tag{2-85}$$

综上所述，狄拉克场的电荷共轭变换为

$$\psi^C = C\tilde{\bar{\psi}},$$

$$\bar{\psi}^C = -\tilde{\psi}C^{-1}, \tag{2-86}$$

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\tilde{\gamma}_\mu, C^+ = C^{-1}, \tilde{C} = -C。$$

在标准表示中，满足上述条件的 $C$ 有

$$C = i\gamma^0\gamma^2。 \tag{2-87}$$

电磁场势 $A_\mu$ 有四个分量，都是实的。它们的复共轭等于自己。电荷共轭变换，是带不同符号电荷的场粒子间的变换。电磁场是不带电的。但它是由带电粒子激发的。不同符号电荷激发的电磁势的方向是不同的。所以，在电荷共轭变换下，电磁势的变换为

$$A_\mu \to A_\mu^C = -A_\mu。 \tag{2-88}$$

显然，在这样的变换下，其拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

是不变的。

**时间反演** 逆着时间的顺序进行观察，把电影倒过来放映，是时间反演的含意。它的定义是

$$\vec{x} \to \vec{x'} = \vec{x}, \ t \to t' = -t, \tag{2-89}$$

同时，场量也作相应的变化。

克莱因-戈登场的变换为

$$\phi(\vec{x}, t) \to \phi'(\vec{x}, -t) = \eta_t \phi(\vec{x}, t),$$

要求拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

不变，

$$\phi^t(\vec{x},-t)\phi^t(\vec{x},-t)=\phi(\vec{x},t)\phi(\vec{x},t),$$
$$\eta_t^2=1,$$
$$\eta_t=\pm1。$$

通常取，$\eta_t=1$，则

$$\phi^t(\vec{x},t)=\phi(\vec{x},-t)。\qquad(2\text{-}90)$$

旋量场的时间反演变换，可定义为

$$\psi(\vec{x},t)\to\psi^t(\vec{x},-t)=T\psi(\vec{x},t)。\qquad(2\text{-}91)$$

$T$ 是 $4\times4$ 矩阵，由拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi$$

不变的要求来确定。

$$\overline{\psi}'(\vec{x},-t)(-i\gamma^0\partial_0+i\vec{\gamma}\cdot\nabla-m)^*\psi'(\vec{x},-t)=$$
$$\overline{\psi}(\vec{x},t)(i\gamma^0\partial_0+i\vec{\gamma}\cdot\nabla-m)\psi(\vec{x},t),$$

$$\overline{\psi}(\vec{x},t)\gamma_0T^+\gamma_0(-i\gamma^0\partial_0+i\vec{\gamma}\cdot\nabla-m)^*T\psi(\vec{x},t)=$$
$$\overline{\psi}(\vec{x},t)(i\gamma^0\partial_0+i\vec{\gamma}\cdot\nabla-m)\psi(\vec{x},t),$$

$$\overline{\psi}(\vec{x},t)\gamma_0T^+\gamma_0(i\widetilde{\gamma^0}\partial_0+i\widetilde{\vec{\gamma}}\cdot\nabla-m)T\psi(\vec{x},t)=$$
$$\overline{\psi}(\vec{x},t)(i\gamma_0\partial_0+i\vec{\gamma}\cdot\nabla-m)\psi(\vec{x},t)。$$

时间反演变换和其它变换不同，除坐标、场量变换外，其它的量要取复数共轭。其理由待量子化后再作说明。由含 $m$ 的项相等，要求

$$\gamma_0T^+\gamma_0=T^{-1}。\qquad(2\text{-}92)$$

由含导数的项相等，要求

$$T^{-1}\widetilde{\gamma}_\mu T=\gamma_\mu。\qquad(2\text{-}93)$$

令$\mu=0$

$$T^{-1}=\gamma_0T^{-1}\widetilde{\gamma}_0,$$

在标准表象中$\widetilde{\gamma_0}=\gamma_0$。与(2-92)式比较得

$$T^{+}=T^{-1}。\tag{2-94}$$

对(2-93)式取转置，再左乘$T^{-1}$，右乘$T$，得

$$T^{-1}\widetilde{T}\gamma_\mu\widetilde{T}^{-1}T=T^{-1}\widetilde{\gamma_\mu}T。$$

与(2-93)式比较，得

$$\widetilde{T}=\pm T。\tag{2-95}$$

综上所述，狄拉克场的时间反演变换为

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x},t)\to\psi'(\vec{x},t)&=T\psi(\vec{x},-t),\\ \overline{\psi}(\vec{x},t)\to\overline{\psi}'(\vec{x},t)&=\overline{\psi}(\vec{x},-t)T^{-1},\end{aligned}\tag{2-96}$$

$$T^{-1}\widetilde{\gamma_\mu}T=\gamma_\mu,\quad T^{+}=T^{-1},\ \widetilde{T}=-T。$$

在标准表象中，满足上列关系的$T$，有

$$T=\gamma_5C^{-1}=\gamma^1\gamma^3。\tag{2-97}$$

电磁场是电荷、电流激发的。在时间反演下，电流倒流，电荷不变，电磁势的变换为

$$\vec{A}(\vec{x},t)\to\vec{A}'(\vec{x},t)=-\vec{A}(\vec{x},-t),\tag{2-98}$$

$$A_0(\vec{x},t)\to A_0'(\vec{x},t)=A_0(\vec{x},-t),$$

而拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$$

保持不变。

**PCT 定理** 在以上的论述中，我们要求各种场的拉格朗日密度不变，或运动方程不变，来确定场量的$P$、$C$、$T$变换。当然，在$PCT$的联合变换下，其拉格朗日密度也不变。由于$P$、$C$、$T$变换表示的对称性，不是严格的对称性，在多种场相互作用的情况下，诸场量在上述定义的各自变换下，其相互作用拉格

朗日密度，对于 $P$、$C$、$T$ 的分别变换，就未必是不变的。但是，对于 $PCT$ 的联合变换，就仍然是不变的。实际上，可以证明：对于任意的、洛仑兹不变的定域场理论，只要玻色场遵从玻色-爱因斯坦统计，费米场遵从费米-狄拉克统计，这理论就一定是 $PCT$ 联合变换下不变的。这就是 $PCT$ 定理。关于这个定理的证明，有兴趣的读者，可以查阅有关文献，如马休斯著《基本粒子相互作用的相对论性量子理论》（科学出版社，1962 年出版 p.76）。

## §6. 协变双旋量

在拉格朗日密度中，狄拉克场量 $\psi$、$\bar{\psi}$ 以双旋量的形式出现。由于重子数守恒，轻子数守恒，或者费米子数守恒，在有直接物理意义的量中，旋量总是成对出现的。所以，我们必需讨论双旋量的种类和变换性质。为此，我们再讨论一下 $\gamma$ 矩阵。

**线性独立的$\gamma$矩阵** 在前面的论述中，满足

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu} \tag{2-99}$$

的 $\gamma$ 矩阵，有 $\gamma^\mu(\mu=0,1,2,3)$ 四个。$\gamma$ 矩阵是 $4\times4$ 矩阵，有十六个元素。线性独立的 $4\times4$ 矩阵，有十六个。它们可以由 $\gamma$ 矩阵组合而成。它们是：

$$I,\ \gamma_\mu,\ \sum\nolimits_{\mu\nu},\ \gamma_5\gamma_\mu,\ \gamma_5 \tag{2-100}$$

共五组十六个。用 $\Gamma_a$ 表示它们中的任一个。由 $\gamma_\mu$ 的性质，可以直接证明，它们有如下的一些性质。

性质 1　对于任一个 $\Gamma_a$，$\Gamma_a^2=\pm1$。　(2-101)

性质 2　除$I$外，任何两个 $\Gamma_a$ 都是反对易的：

$$\Gamma_a\Gamma_b=-\Gamma_b\Gamma_a。 \tag{2-102}$$

性质 3　除$I$外，任一个 $\Gamma_a$ 都是无迹的

$$\mathrm{Tr}\Gamma_a=0。 \tag{2-103}$$

这个性质是性质1、性质2的推论。实际上

$$\pm\mathrm{Tr}\Gamma_a=\mathrm{Tr}\Gamma_a\cdot\Gamma_b^2=-\mathrm{Tr}\Gamma_b\Gamma_a\Gamma_b=-\mathrm{Tr}\Gamma_a\Gamma_b^2=0。$$

性质4　任何两个$\Gamma_a$相乘，其结果仍然是$\Gamma_a$中的一个：

$$\Gamma_a\cdot\Gamma_b=\Gamma_c,\tag{2-104}$$

而且$\Gamma_c\neq 1$。

性质5　它们是线性独立的。要使

$$\sum_a c_a\Gamma_a=0\tag{2-105}$$

成立，只有$c_a=0$时才可达到。式中，对十六个$a$取和。实际上，假设上式成立，对它求迹，得

$$\mathrm{Tr}\sum_a c_a\Gamma_a=4c_1=0,\ c_1=0。$$

用任一个$\Gamma_b\neq I$乘(2-105)式，并求迹，得

$$\mathrm{Tr}\sum_a c_a\Gamma_a\Gamma_b=\mathrm{Tr}\sum_{a\neq b}c_a\Gamma_d+c_b\mathrm{Tr}\Gamma_b^2=\pm c_b=0。$$

**双旋量**　由以(2-100)式表示的五组十六个线性独立的$\Gamma$矩阵，可以构成五组十六个线性独立的双旋量。它们是：

$$\bar\psi\psi,\bar\psi\gamma_\mu\psi,\bar\psi\sum_{\mu\nu}\psi,\bar\psi\gamma_5\gamma_\mu\psi,\bar\psi\gamma_5\psi。\tag{2-106}$$

按照它们在洛仑兹变换和空间反射下的变换性质，分别叫做标量，矢量，张量，赝矢量，赝标量。

**洛仑兹变换**　在洛仑兹变换下，如§4所述，

$$x_\mu\to x'_\mu=a_{\mu\nu}x^\nu,$$

$$\psi(x)\to\psi'(x')=\Lambda\psi(x),$$

$$\bar\psi(x)\to\bar\psi'(x')=\bar\psi(x)\Lambda^{-1},$$

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda=a_{\mu\nu}\gamma^\nu。$$

由此可以证明，上述双旋量的变换为

$$\bar\psi'(x')\psi'(x')=\bar\psi(x)\psi(x),$$

$$\bar\psi'(x')\gamma_\mu\psi'(x')=a_{\mu\nu}\bar\psi(x)\gamma^\nu\psi(x),$$

$$\bar\psi'(x')\sum_{\mu\nu}\psi'(x')=a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}\bar\psi(x)\sum^{\lambda\rho}\psi(x),\tag{2-107}$$

$$\overline{\psi}'(x')\gamma_5\gamma_\mu\psi'(x') = \det|a|a_{\mu\nu}\overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x),$$

$$\overline{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det|a|\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x),$$

$\det|a|$ 表示 $a_{\mu\nu}$ 的矩阵的行列式。例如

$$\overline{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\psi(x)$$

$$= \overline{\psi}(x)a_{\mu\nu}\gamma^\nu\psi(x) = a_{\mu\nu}\overline{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x),$$

$$\overline{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda\psi(x),$$

$$\Lambda^{-1}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\Lambda = a^0_\mu a^1_\nu a^2_\lambda a^3_\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho$$

$$= \frac{1}{4!}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho \begin{vmatrix} a^0_\mu & a^0_\nu & a^0_\lambda & a^0_\rho \\ a^1_\mu & a^1_\nu & a^1_\lambda & a^1_\rho \\ a^2_\mu & a^2_\nu & a^2_\lambda & a^2_\rho \\ a^3_\mu & a^3_\nu & a^3_\lambda & a^3_\rho \end{vmatrix}$$

$$= \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\cdot \begin{vmatrix} a^0_0 & a^0_1 & a^0_2 & a^0_3 \\ a^1_0 & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_0 & a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_0 & a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\det|a|。$$

在正洛仑兹变换下，$\det|a| = 1$，$\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda = \gamma_5$。$\overline{\psi}\psi$ 和 $\overline{\psi}\gamma_5\psi$ 的变换一样，都是不变量；$\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ 和 $\overline{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ 的变换，都和 $x_\mu$ 的变换相同。

**空间反射性质** 在空间反射下，如 §5 所述，

$$\vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x},\ t \to t' = t,$$

$$\psi(\vec{x},t) \to \psi'(-\vec{x},t) = \gamma_0\psi(\vec{x},t),$$

$$\overline{\psi}(\vec{x},t) \to \overline{\psi}'(-\vec{x},t) = \overline{\psi}(\vec{x},t)\gamma_0,$$

$$\gamma_0\gamma_i = -\gamma_i\gamma_0,\ \gamma_0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_0。$$

由此可以证明，(2-106) 式表示的双旋量的变换为

$$\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x),$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{\psi}'(x')\vec{\gamma}\psi'(x') = -\bar{\psi}(x)\vec{\gamma}\psi(x),\\
&\vec{\psi}'(x')\gamma_0\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_0\psi(x),\\
&\bar{\psi}'(x')\Sigma_{0i}\psi'(x') = -\bar{\psi}(x)\Sigma_{0i}\psi(x),\\
&\vec{\psi}'(x')\Sigma_{ij}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\Sigma_{ij}\psi(x), \qquad (2\text{-}108)\\
&\bar{\psi}'(x')\gamma_5\vec{\gamma}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_5\vec{\gamma}\psi(x),\\
&\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma_0\psi'(x') = -\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_0\psi(x),\\
&\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = -\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)。
\end{aligned}
$$

$\bar{\psi}\psi$ 和 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$在洛仑兹变换下不变，在空间反射下相反，故叫标量和赝标量。$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ 在洛仑兹变换下和 $x_\mu$ 一样，在空间反射下相反，故叫矢量和赝矢量。

## §7. 内部空间的对称性

前面论述的，是时空空间的对称性。用连续变换不变性表示的对称性，按诺依率尔定理，总有与之相应的守恒定律，而守恒定律也总可以用某种变换不变的对称性来描写。对称性是守恒定律的基础。时空均匀性是能量、动量守恒的基础。时空各向同性是角动量守恒的基础。空间反射对称是宇称守恒的基础。物理中还存在许多守恒定律，如电荷守恒、重子数守恒、轻子数守恒、同位旋守恒等，在时空空间找不到相应的对称性。它们的基础在哪里呢？人们设想，在时空空间之外，还存在其它空间，名之曰内部空间。许多守恒定律的基础，就是内部空间的对称性。或者说，可以用内部空间的对称性来描述守恒定律。目前认为，内部空间有味道空间和颜色空间。味道空间有多种味道，有各种味道的坐标轴、平面、曲面、子空间。

**轴对称性**　电荷守恒、重子数守恒、轻子数守恒等的基础，

是味空间的轴对称性。可以从绕味轴转动下的不变性，导出它们的守恒流和守恒荷。在内部空间，绕某一味轴的转动，定义为

$$\phi_\alpha(x) \to \phi'_\alpha(x) = e^{-i\theta}\phi_\alpha(x), \tag{2-109}$$

$\theta$ 是转角，是任意实数。无穷小转动时，$\theta$ 是小量

$$\begin{aligned} \phi'_\alpha(x) &= (1-i\theta)\phi_\alpha(x), \\ \delta\phi_\alpha &= -i\theta\phi_\alpha, \\ \delta\phi^*_\alpha &= i\theta\phi^*_\alpha。\end{aligned} \tag{2-110}$$

如果场的拉格朗日密度$\mathscr{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu\phi_\alpha)$在上述变换下不变，按照诺依率尔定理，就存在守恒定律，其守恒流和守恒荷为

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*_\alpha}\delta\phi^*_\alpha, \\ Q &= \int j^0 d^3x, \\ j^\mu &= -i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\phi_\alpha - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*_\alpha}\phi^*_\alpha,\right), \\ Q &= -i\int\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\phi_\alpha - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^*_\alpha}\phi^*_\alpha\right)d^3x。\end{aligned} \tag{2-111}$$

对于不同的场和不同的理论，$j^\mu$、$Q$ 有不同的形式。对于不同的味道，$j^\mu$、$Q$ 有不同的意义。它们可以是电流、电荷；可以是重子流、重子荷；也可以是别的什么流、什么荷。

对于标量场

$$\mathscr{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi,$$

守恒流和守恒荷为

$$\begin{aligned} j^\mu &= -i(\partial^\mu\phi^*\cdot\phi - \phi^*\partial^\mu\phi), \\ Q &= -i\int(\dot{\phi}^*\phi - \dot{\phi}\phi^*)d^3x。\end{aligned} \tag{2-112}$$

对于旋量场

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi,$$

守恒流和守恒荷为

$$j^{\mu}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi,$$

$$Q=\int\psi^{+}\psi d^{3}x。\tag{2-113}$$

**$n$ 维内部空间** 设场量 $\phi_{\alpha}(x)$ 在 $n$ 维内部空间有 $n$ 个分量 $\phi_{\alpha i}(x)$，$i=1,2,\cdots,n$ 是内部空间的分量指标。在这空间的转动下，场量 $\phi_{\alpha i}(x)$ 的变换为

$$\phi_{\alpha i}(x)\to\phi_{\alpha i}(x)=(e^{-i\theta a\lambda a})_{ij}\phi_{\alpha j}(x)。\tag{2-114}$$

$\theta^{a}$ 是变换参数，$\lambda^{a}$ 是由变换性质决定的 $n\times n$矩阵，$a=1,2,\cdots,l$。在无穷小变换下，$\theta^{a}$ 是无穷小量，(2-114) 式为

$$\phi_{\alpha i}\to\phi_{\alpha i}'=(1-i\theta^{a}\lambda^{a})_{ij}\phi_{\alpha j},$$

$$\delta\phi_{\alpha i}=-i\theta^{a}\lambda^{a}_{ij}\phi_{\alpha j}。\tag{2-115}$$

用矩阵表示

$$\phi_{\alpha}=\begin{vmatrix}\phi_{1}\\ \phi_{\alpha 2}\\ \vdots\\ \phi_{n}\end{vmatrix},\qquad \lambda^{a}=\begin{vmatrix}\lambda^{a}_{11} & \lambda^{a}_{12} & \cdots\lambda^{a}_{1n}\\ \vdots & & \\ \lambda^{a}_{n1} & \cdots & \cdots\lambda^{a}_{nn}\end{vmatrix},$$

则 (2-114) 式、(2-115) 式可以写成

$$\phi_{\alpha}\to\phi_{\alpha}'=e^{-i\theta a\lambda a}\phi_{\alpha},$$

$$\phi_{\alpha}\to\phi_{\alpha}'=(1-i\theta^{a}\lambda^{a})\phi_{\alpha},\tag{2-116}$$

$$\delta\phi_{\alpha}=-i\theta^{a}\lambda^{a}\phi_{\alpha}。$$

如果在上述的 $n$ 维 内部空间转动下，场的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi_{\alpha},\partial_{\mu}\phi_{\alpha})$不变，$\delta\mathscr{L}=0$，按照诺依率尔定理，就存在守恒定律，其守恒流和守恒荷为

$$j^{\mu}_{a}=-i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi_{\alpha}}\lambda^{a}\phi_{\alpha}\right),$$

(2-117)

$$Q=-i\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\lambda^a\phi_\alpha d^3x。$$

对于标量场

$$\mathscr{L}=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-m^2\phi^*\phi,$$

守恒流和守恒荷为

$$j^\mu_a=-i(\partial^\mu\phi^*\lambda^a\phi-\partial^\mu\phi\lambda^a\phi^*),$$

$$Q_a=-i\int(\dot{\phi}^*\lambda^a\phi-\dot{\phi}\lambda^a\phi^*)d^3x。\tag{2-118}$$

这时的 $\phi$,在时空空间只有一个分量,在内部空间有 $n$ 个分量。

对于旋量场

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi,$$

守恒流和守恒荷为

$$j^\mu_a=\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^a\psi,$$

$$Q_a=\int\psi^+\lambda^a\psi d^3x。\tag{2-119}$$

这时的 $\psi$,在时空空间有四个分量,在 $n$ 维内部空间有 $n$ 个分量。$\lambda^a$ 是 $n\times n$ 矩阵,只作用在 $\psi$ 的内部空间的分量上。例如,(2-119) 式可以写成

$$Q_a=\int\psi^+_{\alpha\,i}\lambda^a_{i\,j}\psi_{\alpha j}d^3x,\tag{2-120}$$

$\alpha=1,2,3,4$ 是旋量空间的分量指标,$i$、$j=1,2,\cdots,n$ 是 $n$ 维内部空间的分量指标。(2-119) 式是 (2-120) 式的矩阵表示形式。

## 习　题　二

1. 证明:克莱因-戈登场和狄拉克场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_\psi=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi,\ \mathscr{L}_\phi=\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi-m^2\phi^+\phi。$$

2. 证明:洛仑兹规范下电磁场的能量、动量由 (2-31) 式表示。

3. 证明：

$$\chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \chi_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

是光子自旋第三分量的本征函数，而且是正交、规一、完备的。

4. 证明：(2-62) 式表示的狄拉克场的自旋算符。是(2-61)式的解。

5. 证明：(2-87) 式给定的电荷共轭变换矩阵 $C$，满足(2-86)式所要求的条件。

6. 证明：(2-97) 式给定的时间反演矩阵 $T$ 满足 (2-96)式所要求的条件。

7. 证明：(2-107)式第三、第四式表示的张量，赝矢量的洛仑兹变换公式。

8. 写出在 $PCT$ 联合变换下，旋量场的变换公式和不变的拉格朗日密度。

# 第三章 正则量子化和量子场

在第一章中论述的波函数 $\psi$、$A_\mu$、$\phi$ 的意义是不同的。狄拉克波函数$\psi$,在量子力学的框架内,有几率的意义。电磁场势$A_\mu$,决定着电磁场的强度，是电磁场的基本参量。克莱因-戈登场 $\phi$ 是没有意义的。在第二章中,我们把它同等看待,都看作经典场的场量。它们的意义,在量子化以后,才会显现出来。量子化方法，人们认可的有两种，就是正则量子化和路径积分量子化。在本书中，我们采用正则量子化方法。本章先介绍正则量子化的基本方法,然后把它用于具体的场。

## §1. 正则量子化

我们的场论,是拉格朗日场论。正则量子化,是把拉格朗日形式的场,变成正则形式进行量子化。为了便于理解这一过程,我们先讨论力学系统的量子化。

**一个自由度的系统** 在拉格朗日力学中,用广义坐标$q(t)$、广义速度 $\dot{q}(t)$，以及由它们构成的拉格朗日函数 $L(q、\dot{q})$描述。它们的运动,由拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0 \tag{3-1}$$

确定。

由拉格朗日力学转到哈密顿力学,系统就用正则坐标$q(t)$、正则动量 $p(t)$ 以及由它们构成的哈密顿函数 $H(q,p)$ 描述，其定义为

$$p(t)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}},\ H=p\dot{q}-L。\tag{3-2}$$

这样定义的哈密顿函数 $H$，只是 $q$、$p$ 的函数。实际上

$$dH=pd\dot{q}+\dot{q}dp-\frac{\partial L}{\partial q}dq-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}$$

$$=-\frac{\partial L}{\partial q}dq+\dot{q}dp$$

表明：$H$ 确实只是 $p$、$q$ 的函数。作为 $q$、$p$ 的函数，又有

$$dH=\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial p}dp,$$

和上式比较，并考虑到 (3-1) 式和 (3-2) 式，得

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\tag{3-3}$$

这就是哈密顿运动方程。

正则量子化，就是把正则坐标 $q(t)$ 和正则动量 $p(t)$ 都看作算符，并满足正则对易关系。

$$[q(t),p(t)]=i,\ [q(t),q(t)]=0,$$
$$[p(t),p(t)]=0,\tag{3-4}$$

$[A,B]=AB-BA$。这时，运动方程 (3-3) 式，可以写成

$$\dot{q}=i[H,q],\qquad \dot{p}=i[H,p]\tag{3-5}$$

的形式。而正则坐标、正则动量的任意函数 $F(q,p)$ 的运动方程为

$$\dot{F}=i[H,F]。\tag{3-6}$$

**多个自由度的系统**　在拉格朗日力学中，用多个广义坐标 $q_i(t)$、广义速度 $\dot{q}_i(t)$ 以及由它们构成的拉格朗日函数 $L(q_i,\dot{q}_i)$ 描述，$i=1,2,\cdots,n$ 是自由度的指标。拉格朗日运动方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n。\qquad (3\text{-}7)$$

转到哈密顿力学，描述系统的基本参量和函数，就是正则坐标 $q_i(t)$、正则动量 $p_i(t)$ 和哈密顿函数 $H(q_i,p_i)$。其定义为

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\ H=p_i\dot{q}_i-L,\qquad (3\text{-}8)$$

其运动方程为

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ i=1,2,\cdots,n。\qquad (3\text{-}9)$$

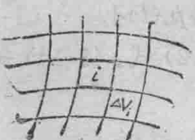
正则量子化，就是把正则坐标、正则动量都看作算符，并满足正则对易关系

$$[q_i(t),p_j(t)]=i\delta_{ij},\ [q_i(t),q_j(t)]=0,$$
$$[p_i(t),p_j(t)]=0,\qquad (3\text{-}10)$$

而运动方程 (3-9) 式就写成

$$\dot{q}_i=i[H,q_i],\ \dot{p}_i=i[H,p_i]。\qquad (3\text{-}11)$$

**无穷多自由度的场** 我们用 $\phi(x)$ 表示任意的场，或任意场的任一分量。如前所述，描述力学系统的参量，不管是广义坐标 $q_i(t)$、广义速度 $\dot{q}_i(t)$，还是拉格朗日函数 $L(q_i(t),\dot{q}_i(t))$，都只是时间 $t$ 的函数。而场量 $\phi(x)$、场量时间导数 $\dot{\phi}(x)$，以及由它们构成的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))$，都不只是时间 $t$ 的函数，也还是空间 $\vec{x}$ 的函数。要用上述方法把它们量子化，就要把它们变成只是时间 $t$ 的函数。为此，我们把空间格子化。




如左图所示，把空间划成许多小格子，每个小格子的体积都很小。如第 $i$ 个小格子，其体积为 $\Delta V_i$。在小格子中，由场量 $\phi(x)$、$\dot{\phi}(x)$ 和拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi$

$(x), \partial_\mu \phi(x))$定义

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\Delta V_i}\int_{\Delta V_i} \phi(\vec{x},t) d^3x,$$

$$\dot{\phi}_i(t) = \frac{1}{\Delta V_i}\int_{\Delta V_i} \dot{\phi}(\vec{x},t) d^3x, \tag{3-12}$$

$$\mathscr{L}_i(t) = \frac{1}{\Delta V_i}\int_{\Delta V_i} \mathscr{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^3x,$$

$$L(t) = \sum_i \mathscr{L}_i(t) \Delta V_i 。$$

显然，它们都只是时间 $t$ 的函数。$i=1,2,\cdots\cdots$ 是小格子的编号指标,可以看成是自由度的指标。当每个小格子的体积 $\Delta V_i \to 0$ 时,空间就有无穷多个小格子,体系就有无穷多个自由度。所以,我们说场是无穷多个自由度的系统。

在拉格朗日力学中,格子化的场,用

$$\phi_i(t),\ \dot{\phi}_i(t),\ i=1,2,\cdots;\ L \tag{3-13}$$

描述。转到哈密顿力学,格子化的场，就用

$$\phi_i(t),\ p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} = \frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \dot{\phi}_i} \Delta V_i,\ H = p_i \dot{\phi}_i - L \tag{3-14}$$

描述。量子化后, $\phi_i(t)$、$p_i(t)$就都是算符,满足对易关系

$$[\phi_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij},\ [\phi_i(t), \phi_j(t)] = 0,$$
$$[p_i(t), p_j(t)] = 0, \tag{3-15}$$

服从运动方程

$$\dot{\phi}_i(t) = i[H, \phi_i(t)],\ \dot{p}_i(t) = i[H, p_i(t)]。 \tag{3-16}$$

当每个小格的体积 $\Delta V_i \to 0$ 时,由 (3-12) 式、(3-14) 式定义的量,就又回到我们熟知的量

$$\phi_i(t) \to \phi(\vec{x},t),\ \ \dot{\phi}_i(t) \to \dot{\phi}(\vec{x},t),$$

$$\pi_i(t)=\frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\dot{\phi}_i}\to\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}},$$

$$p_i(t)=\pi_i(t)\Delta V_i\to\pi(x)\Delta V,$$

$$(3\text{-}17)$$

$$L(t)=\sum_i\mathscr{L}_i(t)\Delta V_i\to L(t)=\int\mathscr{L}(x)d^3x,$$

$$H=\sum_i p_i\dot{\phi}_i-L=\sum_i(\pi_i\dot{\phi}_i-\mathscr{L}_i)\Delta V_i\to$$

$$H=\int\mathscr{H}d^3x=\int(\pi\dot{\phi}-\mathscr{L})d^3x,$$

由（3-15）式表示的对易关系，就成为

$$[\phi_i(t),p_j(t)]=[\phi_i(t),\ \pi_j(t)]\Delta V_j=i\delta_{ij},$$

$$[\phi_i(t),\pi_j(t)]=i\frac{\delta_{ij}}{\Delta V_j}\to[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$[\phi_i(t),\phi_j(t)]=0\to[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)]=0, \qquad (3\text{-}18)$$

$$[\pi_i(t),\pi_j(t)]=0\to[\pi(\vec{x},t),\ \pi(\vec{x}',t)]=0,$$

而（3-16）式表示的运动方程，就成为

$$\dot{\phi}_i(t)=i[H,\phi_i(t)]\to\dot{\phi}(x)=i[H,\phi(x)],$$

$$(3\text{-}19)$$

$$\dot{p}_i(t)=i[H,\ p_i(t)]\to\dot{\pi}(x)=i[H,\pi(x)]。$$

综上所述，场的正则量子化如下：由拉格朗日场的$\phi(x)$、$\dot{\phi}(x)$、$\mathscr{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))$，换成哈密顿的形式

$$\phi(x),\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}},\mathscr{H}=\pi\dot{\phi}-\mathscr{L},H=\int\mathscr{H}d^3x, \qquad (3\text{-}20)$$

量子化后，成为算符，满足对易关系和运动方程

$$[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\ [\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)]=0,$$

$$[\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=0,$$

$$\dot{\phi}(x)=i[H,\phi(x)],\ \dot{\pi}(x)=i[H,\pi(x)]。\qquad (3\text{-}21)$$

对于不同的场、不同的理论，$\phi(x)$、$\pi(x)$ 有不同的意义，$\mathscr{L}$、$H$ 和 (3-21) 式有不同的形式。

## §2. 实标量场和中性介子

实标量场，是数学处理上最简单的场。首先，我们用上述的正则量子化方法用于这种场，以揭示正则量子化方法的特点，并阐明克莱因-戈登场的性质和意义。

**经典场** 经典的克莱因-戈登场，在时空空间只有一个分量 $\phi(x)$，在洛仑兹变换下是不变的，故叫标量场。加上实函数条件 $\phi^*=\phi$，就是实标量场，其拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2,\qquad (3\text{-}22)$$

正则坐标为 $\phi(x)$，正则动量为

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}(x),\qquad (3\text{-}23)$$

哈密顿量为

$$H=\int(\pi\dot{\phi}-\mathscr{L})d^3x$$

$$=\frac{1}{2}\int[\pi^2(x)+(\nabla\phi(x))^2+m^2\phi^2(x)]d^3x。\qquad (3\text{-}24)$$

按 (2-24) 式，场的动量为

$$\vec{p}=-\int\pi(x)\nabla\phi(x)d^3x=-\int\dot{\phi}(x)\nabla\phi(x)d^3x,\qquad (3\text{-}25)$$

按 (2-111) 式，由于它是实的 $\phi^*=\phi$，其荷 $Q=0$。

**量子化** 按照正则量子化方法，把正则坐标 $\phi$ 和正则动量 $\pi=\dot{\phi}$ 看作算符，满足对易关系

$$[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=[\phi(\vec{x},t),\dot{\phi}(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$[\phi(\vec{x},t),\ \phi(\vec{x}',t)]=0, \qquad (3\text{-}26)$$

$$[\pi(\vec{x},t),\ \pi(\vec{x}',t)]=[\dot{\phi}(\vec{x},t),\dot{\phi}(\vec{x}',t]=0,$$

其运动方程为

$$\dot{\phi}=i[H,\phi],\ \dot{\pi}=i[H,\pi]。 \qquad (3\text{-}27)$$

这时 (3-24) 式、(3-25)式表示的 $H$ 和 $\vec{p}$，也都是算符。把(3-24)式代入 (3-27) 式，得

$$\dot{\phi}(\vec{x},t)=\frac{i}{2}\int d^3x'[\pi^2(\vec{x}',t)+(\nabla'\phi(\vec{x}',t))^2$$

$$+m^2\phi^2(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]$$

$$=i\int d^3x'\pi(\vec{x}',t)[\pi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]$$

$$=\int d^3x'\pi(\vec{x}',t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')=\pi(\vec{x},t)$$

$$\dot{\pi}(\vec{x},t)=\ddot{\phi}(\vec{x},t)=\frac{i}{2}\int d^3x'[\pi^2(\vec{x}',t)+(\nabla'\phi(\vec{x}',t))^2$$

$$+m^2\phi^2(\vec{x}',t),\pi(\vec{x},t)]$$

$$=i\int d^3x'\Big\{\nabla'\phi(\vec{x}',t)\cdot\nabla'[\phi(\vec{x}',t),\pi(\vec{x},t)]$$

$$+m^2\phi(\vec{x}',t)[\phi(\vec{x}',t),\pi(\vec{x},t]\Big\}$$

$$=-\int d^3x'\Big\{\nabla'\phi(\vec{x}',t)\cdot\nabla'\delta^3(\vec{x}'-\vec{x})$$

$$+m^2\phi(\vec{x}',t)\delta^3(\vec{x}'-\vec{x})\Big\}$$

$$=\nabla^2\phi(\vec{x},t)-m^2\phi(\vec{x},t),$$

$$(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\phi(x)=0。 \qquad (3\text{-}28)$$

这就是算符的运动方程，仍然是克莱因-戈登方程。

**一般解** 如第一章§2（1-21）式、（1-22）式所示，克莱因-戈登方程，有正能解和负能解

$$e^{-ikx},\ e^{ikx},$$

$$kx=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x},\ \omega=\sqrt{\vec{k}^2+m^2},\tag{3-29}$$

由它们的线性叠加，就构成克莱因-戈登算符方程的一般解

$$\phi(x)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}(a(k)e^{-ikx}+a^+(k)e^{ikx})。\tag{3-30}$$

正能解的系数取 $a(k)$，负能解的系数取 $a^+(k)$，以保证$\phi^+=\phi$。$\phi$是算符，$a$ 和 $a^+$ 也该是算符，它们是 $k=(\omega,\vec{k})$ 的函数。实际上 $\omega=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$，它们只是 $\vec{k}$ 函数，故迭加只对不同的 $\vec{k}$ 迭加。

令

$$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e^{-ikx},\tag{3-31}$$

可以直接证明，在周期边界条件下，满足正交、规一化

$$\int_V f_k^*(x)f_{k'}(x)d^3x=\frac{1}{2\omega}\delta_{\vec{k},\vec{k}'},$$

$$\int_V f_k(x)f_{k'}(x')d^3x=\frac{1}{2\omega}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'},$$

$$\int_V f_k^*(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}f_{k'}(x)d^3x=\delta_{\vec{k},\vec{k}'},$$

$$\int_V f_k(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}f_{k'}(x)d^3x=0,\tag{3-32}$$

则（3-30）式可以写成

$$\phi(x)=\sum_{\vec{k}}(a(k)f_k(x)+a^+(k)f_k^*(x))。\tag{3-33}$$

以 $f^*_k(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}$ 左乘 (3-33) 式，并积分，得

$$\int f^*_k(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} \phi(x)\, d^3x = \sum_{\vec{k}'} \Big( a(k') \int f^*_k(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f_{k'}(x) d^3x$$

$$+ a^+(k') \int f^*_k(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f^*_{k'}(x)\, d^3x \Big)$$

$$= \sum_{\vec{k}'} a(k') \delta_{\vec{k},\vec{k}'} = a(k)。$$

以 $i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f_k(x)$ 右乘 (3-33) 式，并积分，得

$$\int \phi(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f_k(x) d^3x = \sum_{\vec{k}'} \Big( a(k') \int f_{k'}(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f_k(x) d^3x$$

$$+ a^+(k') \int f^*_{k'}(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f_k(x) d^3x$$

$$= \sum_{\vec{k}'} a^+(k') \delta_{\vec{k},\vec{k}'} = a^+(k)。$$

即 (3-33) 式的逆变换为

$$a(k) = \int f^*_k(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} \phi(x) d^3x,$$

$$a^+(k) = \int \phi(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f_k(x) d^3x。 \tag{3-34}$$

**动量函数算符** 克莱因-戈登场，可以用时空函数算符 $\phi(x)$、$\pi(x)$ 描写，也可以用动量函数算符 $a(k)$、$a^+(k)$ 表征。它们之间，用 (3-33) 式、(3-34) 式联系。$\phi(x)$、$\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ 满足对易关系(3-26)式，$a(k)$、$a^+(k)$ 的对易关系，可以由(3-34)

式、(3-26) 式导出。实际上

$$[a(k),a^+(k')]=\int d^3xd^3x'\Big[f^*_k(x)i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\phi(x),$$

$$\phi(x')i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}f_{k'}(x')\Big]_{t'=t}$$

$$=-\int d^3xd^3x'[f^*_k(x)\dot{\phi}(x)-\dot{f}^*_k(x)\phi(x),$$

$$\phi(x')\dot{f}_{k'}(x')-\dot{\phi}(x')f_{k'}(x')]_{t'=t}$$

$$=-\int d^3xd^3x'\Big\{f^*_k(x)\dot{f}_{k'}(x')[\dot{\phi}(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)]$$

$$+\dot{f}^*_k(x)f_{k'}(x')[\phi(\vec{x},t),\dot{\phi}(\vec{x}',t)]\Big\}$$

$$=i\int d^3xd^3x'\Big\{f^*_k(x)\dot{f}_{k'}(x')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$-\dot{f}^*_k(x)f_{k'}(x')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\Big\}$$

$$=\int d^3xf^*_k(x)i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}f_{k'}(x)=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}。$$

同理可证 $[a,a]=0$，$[a^+,a^+]=0$。于是可知，$a(k)$、$a^+(k)$ 满足对易关系

$$[a(k),a^+(k')]=\delta_{\vec{k},\vec{k}'},[a(k),a(k')]=0,$$
$$[a^+(k),a^+(k')]=0。\tag{3-35}$$

把 (3-33) 式代入 (3-24) 式、(3-25) 式，得

$$H=\frac{1}{2}\int[\dot{\phi}^2(x)+(\nabla\phi(x))^2+m^2\phi^2(x)]d^3x$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3x\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\Big\{\Big(a(k)\dot{f}_k(x)+a^+(k)\dot{f}^*_k(x)\Big)$$

$$\Big(a(k')\dot{f}_{k'}(x)+a^+(k')\dot{f}^*_{k'}(x)\Big)$$

$$+\Big(a(k)\nabla f_k(x)+a^+(k)\nabla f_k^*(x)\Big)$$

$$\cdot\Big(a(k')\nabla f_{k'}(x)+a^+(k')\nabla f_{k'}^*(x)\Big)$$

$$+m^2\Big(a(k)f_k(x)+a^+(k)f_k^*(x)\Big)$$

$$\Big(a(k')f_{k'}(x)+a^+(k')f_{k'}^*(x)\Big)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3x\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\Big\{(-\omega\omega')\Big(a(k)f_k(x)-a^+(k)f_k^*(x)\Big)$$

$$\Big(a(k')f_{k'}(x)-a^+(k')f_{k'}^*(x)\Big)$$

$$+(-\vec{k}\cdot\vec{k}')\Big(a(k)f_k(x)-a^+(k)f_k^*(x)\Big)$$

$$\Big(a(k')f_{k'}(x)-a^+(k')f_{k'}^*(x)\Big)$$

$$+m^2\Big(a(k)f_k(x)+a^+(k)f_k^*(x)\Big)$$

$$\Big(a(k')f_{k'}(x)+a^+(k')f_{k'}^*(x)\Big)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3x\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\Big\{\Big(-\omega\omega'-\vec{k}\cdot\vec{k}'+m^2\Big)$$

$$\Big(a(k)a(k')f_k(x)f_{k'}(x)+a^+(k)a^+(k')f_k^*(x)f_{k'}^*(x)\Big)$$

$$+\Big(\omega\omega'+\vec{k}\cdot\vec{k}'+m^2\Big)$$

$$\Big(a(k)a^+(k')f_k(x)f_{k'}^*(x)+a^+(k)a(k')f_k^*(x)f_{k'}(x)\Big)\Big\}$$

$$=\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\frac{1}{2}\Big\{(-\omega\omega'-\vec{k}\cdot\vec{k}'+m^2)\Big(a(k)a(k')\frac{1}{2\omega}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}$$

$$+a^+(k)a^+(k')\frac{1}{2\omega}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\Big)$$

$$+(\omega\omega'+\vec{k}\cdot\vec{k'}+m^2)\Big(a(k)a^+(k')\frac{1}{2\omega}\delta_{\vec{k},\vec{k'}}$$

$$+a^+(k)a(k')\frac{1}{2\omega}\delta_{\vec{k},\vec{k'}}\Big)\Big\}$$

$$=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{2}\Big\{\Big(-\omega^2+\vec{k}^2+m^2\Big)$$

$$\Big(a(k)a(k)+a^+(k)a^+(k)\Big)\frac{1}{2\omega}+(\omega^2+\vec{k}^2+m^2)$$

$$\Big(a(k)a^+(k)+a^+(k)a(k)\Big)\frac{1}{2\omega}\Big\}$$

$$=\sum_{\vec{k}}\omega\Big(a^+(k)a(k)+\frac{1}{2}\Big)。$$

$$\vec{p}=-\int\dot{\phi}(x)\nabla\phi(x)d^3x$$

$$=-\int d^3x\sum_{\vec{k},\vec{k'}}\Big(a(k)\dot{f}_k(x)+a^+(k)\dot{f}_k^*(x)\Big)$$

$$\nabla\Big(a(k')f_{k'}(x)+a^+(k')f_{k'}^*(x)\Big)$$

$$=-\int d^3x\sum_{\vec{k},\vec{k'}}(\omega\vec{k'})\Big(a(k)f_k(x)-a^+(k)f_k^*(x)\Big)$$

$$\Big(a(k')f_{k'}(x)-a^+(k')f_k^*(x)\Big)$$

$$=-\sum_{\vec{k},\vec{k'}}\Big(\frac{\omega\vec{k'}}{2\omega}\Big)\Big(a(k)a(k')\delta_{\vec{k},-\vec{k'}}+a^+(k)a^+(k')\delta_{\vec{k},-\vec{k'}}$$

$$-a(k)a^+(k')\delta_{\vec{k},\vec{k'}}-a^+(k)a(k')\delta_{\vec{k},\vec{k'}}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{k}}{2}\Big(a^+(k)a(k)+a(k)a^+(k)$$

$$-a(k)a(-k)-a^+(k)a^+(-k)\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k}}\vec{k}a^+(k)a(k)。$$

场的能量、动量算符也用算符 $a(k)$、$a^+(k)$ 表示为

$$H=\sum_{\vec{k}}\omega\left(a^+(k)a(k)+\frac{1}{2}\right),$$

$$\vec{p}=\sum_{\vec{k}}\vec{k}a^+(k)a(k)。\tag{3-36}$$

**粒子性** 于是可知，克莱因-戈登场由动量函数算符 $a(k)$、$a^+(k)$ 描述。克莱因-戈登场的性质，也可以由（3-35）式、（3-36）式推测出来。在（3-36）式中，动量函数算符以

$$N(k)=a^+(k)a(k)\tag{3-37}$$

的形式出现。因此，我们取 $N$ 对角化的表象，令

$$N|n>=n|n>,\tag{3-38}$$

$|n>$ 是算符 $N$ 的、本征值为 $n$ 的本征函数。

由（3-35）式可以导出 $N$ 和 $a$、$a^+$ 的对易关系为

$$[N,a^+]=a^+aa^+-a^+a^+a=a^+(1+a^+a)-a^+a^+a=a^+,\tag{3-39}$$

$$[N,a]=a^+aa-aa^+a=a^+aa-(1+a^+a)a=-a。$$

由（3-38）式、（3-39）式，得

$$Na^+|n>=(a^++a^+N)|n>=(n+1)a^+|n>,$$

$$Na|n>=(-a+aN)|n>=(n-1)a|n>。\tag{3-40}$$

这表明：若 $|n>$ 是算符 $N$ 的、本征值为 $n$ 的本征函数，则 $a^+|n>$ 也是 $N$ 的本征函数，本征值为 $n+1$；$a|n>$ 也是 $N$ 的本征函数，本征值为 $n-1$。依此类推，由 $|n>$ 可以构成算符 $N$ 的本征函数序列，其本征值依序差 1。

$$\cdots\cdots a^2|n>,a|n>,|n>,a^+|n>,a^{+2}|n>,\cdots$$

$$\cdots\cdots n-2,n-1,n,n+1,n+2,\cdots$$

再者，设 $|n>$ 是规一化的，$<n|n>=1$，则

$$n=<n|a^+a|n>=|a|n>|^2\geqslant 0。$$

这表明：$N$ 的本征值是正定的。本征值既是正定的，又是逐次相差一的无穷序列。显然，算符 $N$ 的本征值应该是正整数，即

$$n=0,1,2,\cdots\cdots \qquad (3\text{-}41)$$

由 (3-36) 式看来，本征值为正整数的算符 $N(k)$ 的意义可以解释为：能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$ 的粒子数算符。场的能量是各种粒子能量的叠加。$\sum\limits_{\vec{k}}\frac{1}{2\omega}$ 是零点能。场的动量是各种粒子动量之和。而 (3-40) 式表明：$a^+(k)$ 使 $n$ 个粒子的状态变成 $n+1$ 个粒子的状态，它是产生一个能量为 $\omega$、动量为 $k$ 的粒子的产生算符，$a(k)$ 使 $n$ 个粒子的状态变成 $n-1$ 个粒子的状态，它是消灭一个能量为 $\omega$、动量为 $k$ 的粒子的消灭算符。

用 $|0>$ 表示一个粒子也没有的状态，叫做真空态，且

$$a|0>=0, \qquad (3\text{-}42)$$

则其它粒子的状态，可以由产生算符作用于真空态构成。例如：

$$a^+(k)|0>,a^+(k_1)a^+(k_2)|0>,\frac{1}{\sqrt{2}}a^+(k)^2|0>,\cdots\cdots \qquad (3\text{-}43)$$

分别是：一个能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$ 的粒子的状态，一个能量为 $\omega_1$、动量为 $\vec{k}_1$，一个能量为 $\omega_2$、动量为 $\vec{k}_2$ 的两粒子状态，两个能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$ 的粒子状态…。

## §3. 复标量场和有荷介子

实标量场，因为它是实的，$\phi^+=\phi$，不存在如 (2-109) 式所示的轴对称变换下的不变性，不存在如 (2-111) 式所示的守恒

荷。量子化后，只能描述中性介子，只能描述没有电荷、没有奇异荷…的无荷介子。有荷介子要用复标量量子场来描写。

**经典场** 复标量场的场量 $\phi(x)\neq\phi^{+}(x)$，其拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\partial_{\mu}\phi^{+}\partial^{\mu}\phi-m^{2}\phi^{+}\phi, \tag{3-44}$$

$\phi(x)$ 和 $\phi^{+}(x)$ 都是正则坐标。相应的正则动量为

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}^{+}(x),\pi^{+}(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^{+}}=\dot{\phi}(x), \tag{3-45}$$

场的能量、动量、守恒荷为

$$\begin{aligned}
H&=\int(\pi\dot{\phi}+\pi^{+}\dot{\phi}^{+}-\mathscr{L})d^{3}x\\
&=\int(\dot{\phi}^{+}\dot{\phi}+\nabla\phi^{+}\cdot\nabla\phi+m^{2}\phi^{+}\phi)d^{3}x,\\
\vec{p}&=-\int(\dot{\phi}^{+}\nabla\phi+\dot{\phi}\nabla\phi^{+})d^{3}x, \qquad (3-46)\\
Q&=-i\int(\dot{\phi}^{+}\phi-\dot{\phi}\phi^{+})d^{3}x。
\end{aligned}$$

**量子化** 把正则坐标$\phi(x)$、$\phi^{+}(x)$和正则动量 $\dot{\phi}^{+}(x)$、$\dot{\phi}(x)$看作算符，满足正则对易关系

$$\begin{aligned}
&[\phi(\vec{x},t),\dot{\phi}^{+}(\vec{x}',t)]=i\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}'),\\
&[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)]=0,\ [\dot{\phi}^{+}(\vec{x},t),\ \dot{\phi}^{+}(\vec{x}',t)]=0, \qquad (3-47)\\
&[\phi^{+}(\vec{x},t),\dot{\phi}(\vec{x}',t)]=i\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}'),\\
&[\phi^{+}(\vec{x},t),\ \phi^{+}(\vec{x}',t)]=0,[\dot{\phi}(\vec{x},t),\ \dot{\phi}(\vec{x}',t)]=0,\\
&[\phi(\vec{x},t),\phi^{+}(\vec{x}',t)]=0,\ [\dot{\phi}(\vec{x},t),\dot{\phi}^{+}(\vec{x}',t)]=0,\\
&[\phi(\vec{x},t),\dot{\phi}(\vec{x}',t)]=0,[\phi^{+}(\vec{x},t),\dot{\phi}^{+}(\vec{x}',t)]=0,
\end{aligned}$$

其正则运动方程为

$$\dot{\phi}=i[H,\phi],\ \ddot{\phi}^{+}=i[H,\dot{\phi}^{+}],$$

$$\dot{\phi}^+ = i[H,\phi^+], \quad \ddot{\phi} = i[H,\dot{\phi}], \tag{3-48}$$

(3-46) 式表示的场的守恒量，也成为算符。把 (3-46) 式的$H$代入 (3-48) 式，得

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0, \tag{3-49}$$

场算符的正则方程就是克莱因-戈登方程。

**一般解** 象实标量场一样，满足 (3-49) 式的复标量场也有平面波解。由正、负能量的平面波解叠加，就得到它的一般解

$$\phi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} \left(a(k)e^{-ikx} + b^+(k)\, e^{ikx}\right),$$

$$\phi^+(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} \left(a^+(k)e^{ikx} + b(k)\, e^{-ikx}\right),$$

$$\dot{\phi}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{-i\omega}{\sqrt{2V\omega}} \left(a(k)e^{-ikx} - b^+(k)e^{ikx}\right),$$

$$\dot{\phi}^+(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{i\omega}{\sqrt{2V\omega}} \left(a^+(k)e^{ikx} - b(k)^{-ikx}\right)。 \tag{3-50}$$

和实标量场不同，展开系数除 $a(k)$、$a^+(k)$ 外，还有 $b(k)$、$b^+(k)$。复标量场的自由度，比实标量场的多一倍。

利用如 (3-31) 式、(3-32)式所示的正交、规一性，由(3-50)式可以得到

$$a(k) = \int f_k^*(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} \phi(x) d^3x,$$

$$b^+(k) = \int \phi(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f_k(x) d^3x, \tag{3-51}$$

$$a^+(k) = \int \phi^+(x) i \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} f_k(x) d^3x,$$

$$b(k)=\int f_k^*(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}\phi^+(x)d^3x。$$

**动量函数算符** 综上所述，量子复标量场，既可用时空函数算符$\phi(x)$、$\dot{\phi}^+(x)$、$\phi^+(x)$、$\dot{\phi}(x)$描写，又可用动量函数算符$a(k)$、$a^+(k)$、$b(k)$、$b^+(k)$表征。它们之间由(3-50)式、(3-51)式联系。由时空函数算符满足的对易关系(3-48)式，可以导出动量函数算符满足的对易关系

$$\begin{aligned}
&[a(k),a^+(k')]=\delta_{\vec{k},\vec{k}'},[a(k),a(k')]=0\\
&[a^+(k),a^+(k')]=0; \qquad\qquad (3\text{-}52)\\
&[b(k),b^+(k')]=\delta_{\vec{k},\vec{k}'},[b(k),b(k')]=0,\\
&[b^+(k),b^+(k')]=0;\\
&[a(k),b(k')]=0,\ [a(k),b^+(k')]=0,\\
&[a^+(k),b(k')]=0。
\end{aligned}$$

把(3-51)式代入(3-46)式，可以得到用动量函数算符表示的场的能量、动量、守恒荷

$$\begin{aligned}
&H=\sum_{\vec{k}}\omega\Big(a^+(k)a(k)+b^+(k)b(k)+1\Big),\\
&\vec{p}=\sum_{\vec{k}}\vec{k}\Big(a^+(k)a(k)+b^+(k)b(k)\Big), \qquad\qquad (3\text{-}53)\\
&Q=\sum_{\vec{k}}\Big(a^+(k)a(k)-b^+(k)b(k)\Big)。
\end{aligned}$$

**粒子性** 复标量场的动量函数算符$a(k)$、$a^+(k)$、$b(k)$、$b^+(k)$满足的对易关系(3-52)式，和实标量场动量函数算符$a(k)$、$a^+(k)$满足的(3-35)式一样。它们出现在守恒量中的形式，如(3-53)式所示，也和(3-36)式所示的一样。因而，它们具有相同的物理意义。在(3-53)式的第三式中，$a^+a$算符和$b^+b$算符有不同的符号，表示相应粒子带有不同符号的荷。所以，我们

把 $a(k)$、$a^+(k)$、$N(k)=a^+(k)a(k)$ 叫做能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$ 的粒子的消灭算符、产生算符、粒子数算符。把 $b(k)$、$b^+(k)$、$\overline{N}(k)=b^+(k)b(k)$ 叫做反粒子的消灭算符、产生算符、粒子数算符。

象实标量场一样，可以用

$$|0>, a|0>=0, b|0>=0$$

表示真空态矢量。那么

$$a^+(k)|0>, b^+(k)|0>, a^+(k)b^+(k')|0>, \cdots\cdots \tag{3-54}$$

就是一个能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$ 的粒子态矢量；一个能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$ 的反粒子态矢量；一个能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$ 的粒子，一个能量为 $\omega'$、动量为 $\vec{k'}$ 的粒子，共两个粒子的态矢量……。

有荷介子，如 $\pi^+$、$\pi^-$，它们一个带正电荷，一个带负电荷；如 $K^0$、$\overline{K}^0$ 是不带电的，是带奇异荷的，$K^0$ 的奇异荷为 $+1$，$\overline{K}^0$ 的奇异荷为 $-1$。不管是 $\pi^+$、$\pi^-$，还是 $K^0$、$\overline{K}^0$，都可以用上述的复标量量子场描述。

## §4. 狄拉克场和费米子

量子化的克莱因-戈登场，描写的是自旋为零的玻色子。在一个量子态中，可以有任意多个全同玻色子。狄拉克场，在量子力学的意义上，就是描写自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子的。再量子化以后，当然仍旧要描写自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子。在再量子化以前，我们把它看作和克莱因-戈登场一样的经典场。

**经典场** 狄拉克场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x), \tag{3-55}$$

正则坐标为$\psi(x)$。$\mathscr{L}$中不含$\dot{\bar{\psi}}$的导数，$\bar{\psi}$不是正则坐标。正则动量为

$$\pi(x)=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}}=i\psi^+(x), \tag{3-56}$$

狄拉克场的能量、动量、守恒荷，如(2-26)式、(2-113)式所示，

$$H=\int\psi^+(x)(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi(x)d^3x,$$

$$\vec{p}=-i\int\psi^+(x)\nabla\psi(x)d^3x, \tag{3-57}$$

$$Q=\int\psi^+(x)\psi(x)d^3x。$$

**量子化** 把$\psi(x)$和$i\psi^+(x)$看作算符，满足一定的对易关系。如果象前几节一样，认为它们的对易关系为

$$[\psi_\alpha(\vec{x},t),i\psi_\beta{}^+(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$[\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi_\beta(\vec{x}',t)]=0,[\psi_\alpha^+(\vec{x},t),\psi_\beta^+(\vec{x}',t)]=0, \tag{3-58}$$

就会得到与物理事实不符的结果。前两节的论述告诉我们，用上述对易关系量子化得出的产生算符$a^+(k)$，彼此都是可以对易的，它们自身也是可以对易的。因而，由它们可以构成任意多个有同样能量$\omega$、同样动量$\vec{k}$的粒子的粒子态，如$\frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+n}(k)|0>$。这在玻色子的情况下是允许的。对于狄拉克场，在量子力学的框架内，它描写自旋为$\frac{1}{2}$的费米子。在二次量子化以后，它应该仍然描述自旋为$\frac{1}{2}$的费米子。大家知道，费米子遵从费米-狄拉克统计，遵从泡里不相容原理，在同一个量子态中，不允许有多于一个的粒子。如果按照(3-58)式把狄拉克场量子化，进行如上两节所述的论证，必然得到同样的结果：具有同样能量、动量、自旋的多个粒子，可以处于同一量子态。这是不能允许的。所以，人们不用(3-58)式把狄拉克场量子化，而另

想办法。人们研究的结果，认为狄拉克场算符应该满足的对易关系为

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi_\beta^+(\vec{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t),\ \psi_\beta(\vec{x}',t)\}=0,\ \{\psi_\alpha^+(\vec{x},t),\psi_\beta^+(\vec{x}',t)\}=0。\quad(3\text{-}59)$$

和(3-58)式的差别，只是把对易子 $[A,B]=AB-BA$，换成反对易子。$\{A,B\}=AB+BA$。这差别是唯一的，也是基本的和十分重要的，由此引出的结论是大为不同的。由(3-57)式表示的物理量，都含有两个狄拉克算符，相当于一个玻色算符，故运动方程保持原有形式

$$\dot{\psi}=i[H,\psi],\ \dot{\psi}^+=i[H,\psi^+]。\quad(3\text{-}60)$$

把 (3-57) 式的 $H$ 代入上式，得

$$\dot{\psi}(\vec{x},t)=i[\int\psi^+(\vec{x}',t)(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla'+\beta m)\psi(\vec{x}',t)d^3x',$$

$$\psi(\vec{x},t)],$$

利用公式

$$[AB,C]=ABC-CAB+ACB-ACB$$

$$=A\{B,C\}-\{A,C\}B,\quad(3\text{-}61)$$

上式可以写成

$$\dot{\psi}_\alpha(\vec{x},t)=i\int d^3x'\Big(\psi_\sigma^+(\vec{x}',t)(-i\vec{\alpha}\nabla'+\beta m)_{\sigma\rho}$$

$$\{\psi_\rho(\vec{x}',t),\ \psi_\alpha(\vec{x},t)\}-\{\psi_\sigma^+(\vec{x}',t),\psi_\alpha(\vec{x},t)\}$$

$$(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla'+\beta m)_{\sigma\rho}\psi_\rho(\vec{x}',t)\Big)$$

$$=-i\int d^3x'\delta_{\sigma\alpha}\delta^3(\vec{x}'-\vec{x})(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla'+\beta m)_{\sigma\rho}\psi_\rho(\vec{x}',t),$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}',t)=(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi(\vec{x},t)。$$

这就是人所熟知的狄拉克方程。它现在是算符方程。这时 (3-57)式就是场的能量、动量、守恒荷算符。

**一般解** 第一章的论述表明：狄拉克方程，有如(1-75)式、(1-76)式所示的正负能量的平面波解。其一般解由其迭加而成

$$\psi(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left(C(p,s)u(p,s)e^{-ipx}+d^{+}(p,s)v(p,s)e^{ipx}\right),$$

(3-63)

$$\psi^{+}(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left(C^{+}(p,s)u^{+}(p,s)e^{ipx}\right.$$
$$\left.+d(p,s)v^{+}(p,s)e^{-ipx}\right)。$$

式中，$E=\sqrt{\vec{p}^{2}+m^{2}}$，$u(p,s)$ 是能量为 $E$、动量为 $\vec{p}$、自旋为 $s$ 的波函数，$v(p,s)$ 是能量为 $-E$、动量为 $-\vec{p}$、自旋为 $s$ 的波函数。$c(p,s)$、$c^{+}(p,s)$、$d(p,s)$、$d^{+}(p,s)$ 是展开系数，是算符。

利用 $u(p,s)$、$v(p,s)$ 的正交、规一化

$$u^{+}(p,s)u(p,s')=\frac{E}{m}\delta_{s,s'},\quad v^{+}(p,s)v(p,s')=\frac{E}{m}\delta_{s,s'},$$

$$v^{+}(-\vec{p},s)u(\vec{p},s')=u^{+}(\vec{p},s)v(-\vec{p},s)=0,$$

以及平面波的正交、规一化

$$\frac{1}{V}\int_{V}e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}d^{3}x=\delta_{\vec{p},\vec{p}'},$$

由(3-63)式，可以推出

$$c(p,s)=\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{ipx}u^{+}(p,s)\psi(x)d^{3}x,$$

$$c^{+}(p,s)=\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{-ipx}\psi^{+}(x)u(p,s)d^{3}x,$$

(3-64)

$$d(p,s)=\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{ipx}\psi^+(x)v(p,s)d^3x,$$

$$d^+(p,\ s)=\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{-ipx}v^+(p,s)\psi(x)d^3x。$$

例如，把 $\psi$ 的展开式代入 (3-64) 式的第一式右边，得

$$\sqrt{\frac{m}{VE}}\int d^3xe^{ipx}u^+(p,s)\sum_{\vec{p}',s'}\sqrt{\frac{m}{VE}}(c(p',s')u(p',s')e^{-ip'x}$$

$$+d^+(p',s')v(p',s')e^{ip'x})$$

$$=\sum_{\vec{p}',s'}\frac{m}{\sqrt{EE'}}\Big(c(p',s')u^+(p,s)u(p',s')\delta_{\vec{p},\vec{p}'}$$

$$+d^+(p',s')u^+(p,s)v(p',s)e^{i2\omega t}\delta_{\vec{p},-\vec{p}'}\Big)$$

$$=\sum_{s'}\frac{m}{E}\Big(c(p,s')u^+(p,s)u(p,s')$$

$$+d^+(-\vec{p},s)u^+(p,s)v(-\vec{p},s')e^{i2\omega t}\Big)$$

$$=\sum_{s'}c(p,s')\delta_{s,s'}=c(p,s)。$$

**动量、自旋函数算符**　于是可知，二次量子化的狄拉克场，既可用时空函数算符 $\psi(x)$、$\psi^+(x)$ 描述，又可用动量、自旋函数算符 $c(p,s)$、$c^+(p,s)$、$d(p,s)$、$d^+(p,s)$ 表征。它们之间由 (3-63) 式、(3-64) 式联系。算符 $\psi(x)$、$\psi^+(x)$ 满足对易关系 (3-53) 式，由此可以导出 $c(p,s)$、$c^+(p,s)$、$d(p,s)$、$d^+(p,s)$ 满足的对易关系

$$\{c(p,s),c^+(p',s')\}=\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\delta_{s,s'},$$

$$\{d(p,s),d^+(p',s')\}=\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\delta_{s,s'},\qquad(3\text{-}65)$$

其余都反对易。

把 (3-64) 式代入上式，就可以证实。例如

$$\{c(p,s),c^+(p',s')\}=\left\{\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{ipx}u^+(p,s)\psi(\vec{x},t)\,d^3x,\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{m}{VE'}}\int e^{-ip'x'}\psi^+(\vec{x}',t)u(p',s')d^3x'\right\}$$

$$=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int d^3xd^3x'e^{ipx-ip'x'}u^+(p,s)_\alpha u(p',s')_\beta$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi_\beta^+(\vec{x}',t)\}$$

$$=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int d^3xd^3x'e^{ipx-ip'x'}u^+(p,s)_\alpha u(p',s')_\beta$$

$$\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int d^3xe^{i(p-p')x}u^+(p,s)u(p',s')$$

$$=\frac{m}{\sqrt{EE'}}u^+(p,s)u(p',s')\ \delta_{\vec{p},\vec{p}'}=\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\delta_{s,s'},$$

$$\{c(p,s),d(p',s')\}=\left\{\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{ipx}u^+(p,s)\psi(\vec{x},t)d^3x,\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{m}{VE'}}\int e^{ip'x'}\psi^+(\vec{x}',t)v(p',s')d^3x'\right\}$$

$$=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int d^3xd^3x'e^{ipx\pm ip'x'}u_\alpha^+(p,s)v_\beta(p',s')$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi_\beta^+(\vec{x}',t)\}$$

$$=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int d^3xd^3x'e^{ipx\pm ip'x'}u_\alpha^+(p,s)v_\beta(p',s')\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int d^3xe^{i(p\pm p')x}u_-^+(p,s)v(p',s')$$

$$=\frac{m}{\sqrt{EE'}}\delta_{\vec{p}=-\vec{p}'}\ e^{i2Et}u^+(\vec{p},s)v(-\vec{p},s')=0。$$

把 (3-63) 式代入 (3-57) 式，得

$$H=\sum_{\vec{p},s}E\Big(c^+(p,s)c(p,s)+d^+(p,s)\,d\,(p,s)-1\Big),$$

$$\vec{p}=\sum_{\vec{p},s}\vec{p}\,\Big(c^+(p,s)c(p,s)+d^+(p,s)d(p,s)\Big),\qquad (3\text{-}66)$$

$$Q=\sum_{\vec{p},s}\Big(c^+(p,s)c(p,s)-d^+(p,s)d(p,s)\Big)。$$

实际上，

$$H=\int\psi^+(x)(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi(x)d^3x$$

$$=\int d^3x\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c^+(p,s)u^+(p,s)e^{ipx}+d(p,s)v^+(p,s)e^{-ipx}\Big)$$

$$(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\sum_{\vec{p}',s'}\sqrt{\frac{m}{VE'}}\Big(c(p',s')u(p',s')e^{-ip'x}$$

$$+d^+(p',s')v(p',s')e^{ip'x}\Big)$$

$$=\int d^3x\sum_{\vec{p},s}\sum_{\vec{p}',s'}\frac{m}{V}\sqrt{\frac{E'}{E}}\Big(c^+(p,s)u^+(p,s)e^{ipx}$$

$$+d(p,s)v^+(p,s)e^{-ipx}\Big)\Big(c(p',s')u(p',s')e^{-ip'x}$$

$$-d^+(p',s')v(p',s')e^{ip'x}\Big)$$

$$=\int d^3x\sum_{\vec{p},s}\sum_{\vec{p}',s'}\frac{m}{V}\sqrt{\frac{E'}{E}}$$

$$\{c^+(p,s)c(p',s')u^+(p,s)u(p's')e^{i(p-p')x}$$

$$-c^+(p,s)d^+(p',s')u^+(p,s)v(p',s')e^{i(p+p')x}$$

$$+d(p,s)c(p',s')v^+(p,s)u(p',s')e^{-i(p+p')x}$$

$$-d(p,s)d^+(p',s')v^+(p,s)v(p',s')e^{-i(p-p')x}\}$$

$$= \sum_{\vec{p},s}\sum_{\vec{p}',s'} m\sqrt{\frac{E'}{E}}\Big\{c^+(p,s)c(p',s')u^+(p,s)u(p',s')\delta_{\vec{p},\vec{p}'}$$

$$-c^+(p,s)d^+(p',s')u^+(p's')v(p',s')e^{i2Et}\delta_{\vec{p},-\vec{p}'}$$

$$+d(p,s)c(p',s')v^+(p,s)u(p',s')e^{-i2Et}\delta_{\vec{p},-\vec{p}'}$$

$$-d(p,s)d^+(p',s')v^+(p,s)v(p',s')\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\Big\}$$

$$= \sum_{\vec{p},s,s'} m\Big\{c^+(p,s)c(p,s')u^+(p,s)u(p,s')$$

$$-c^+(p,s)d^+(p',s')u^+(\vec{p},s)v(-\vec{p},s')e^{i2Et}$$

$$+d(p,s)c(p',s')v^+(p,s)u(-\vec{p},s')e^{-i2Et}$$

$$-d(p,s)d^+(p,s')v^+(p,s)v(p,s')\Big\}$$

$$= \sum_{\vec{p},s} E\Big(c^+(p,s)c(p,s)-d(p,s)d^+(p,s)\Big)。$$

将算符 $(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)$ 换成 $-i\nabla$，在上列计算中，就是 $E$ 换成 $\vec{p}$。其结果就是场的动量算符的表达式。

去掉算符 $(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)$，在上列计算中，就是去掉 $E$，并将 $-$ 号换成 $+$ 号。其结果就是荷算符的表达式。

**粒子性** 在场的能量、动量、荷的表示式中，描述场的基本算符 $c(p,s)$、$c^+(p,s)$、$d(p,s)$、$d^+(p,s)$ 以组合

$$N(p,s)=c^+(p,s)c(p,s);$$

$$\overline{N}(p,s)=d^+(p,s)d(p,s) \tag{3-67}$$

的形式出现。根据对易关系 (3-65) 式，可以证明：

$$[N,c^+]=c^+,\ [N,c]=-c,$$

$$[\overline{N},d^+]=d^+,\ [\overline{N},d]=-d, \tag{3-68}$$

$$N^2=N,\ \overline{N}^2=\overline{N}。$$

例如

$$[N,c^+]=c^+cc^+-c^+c^+c=c^+(1-c^+c)=c^+,$$
$$[N,c]=c^+cc-cc^+c=-(1-c^+c)c=-c,$$
$$N^2=c^+cc^+c=c^+(1-c^+c)c=c^+c=N。$$

在 $N$ 和$\overline{N}$的对角表象中， 令

$$N|n>=n|n>,\ \overline{N}\left|\overline{n}>=\overline{n}\right|\overline{n}>,$$

则由（3-68）式可得

$$Nc^+|n>=(n+1)c^+|n>,\ Nc|n>=(n-1)c|n>,$$
$$\overline{N}d^+\left|\overline{n}>=(\overline{n}+1)\,d^+\right|n>,$$
$$\overline{N}d\left|\overline{n}>=(\overline{n}-1)\,d\right|\overline{n}>,$$
$$N^2|n>=N|n>,n^2=n,n=0,1,$$
$$\overline{N}^2\left|\overline{n}>=\overline{N}\right|\overline{n}>,\ \overline{n}^2=\overline{n},\ \overline{n}=0,1。$$

这表明：$c(p,s)$、$c^+(p,s)$、$N(p,s)$ 是粒子的消灭算符、产生算符、粒子数算符，其能量为 $E$、动量为 $\vec{p}$、自旋为$s$。粒子数 $n$ 只能是 0 或 1。这粒子是费米子。$d(p,s)$、$d^+(p,s)$、$\overline{N}(p,s)$ 是反粒子的消灭算符、产生算符、粒子数算符，$p$ 表示其能量为 $E$、动量为$\vec{p}$，$s$ 表示它的自旋。在同样能量、动量、自旋的反粒子数，只能是 0 或 1。反粒子也是费米子。正粒子、反粒子的差别在于荷的符号不同。

象在标量场的情况一样，可以用

$$|0>,c|0>=0,d|0>=0$$

表示真空态，用

$$c^+(p,s)|0>;\ d^+(p,s)|0>;$$
$$c^+(p,s)d^+(p',s')|0>,\cdots\cdots \tag{3-69}$$

表示：一个能量为 $E=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$，动量为$\vec{p}$，自旋为 $s$ 的粒子

态；一个能量为 $E$、动量为 $\vec{p}$、自旋为 $s$ 的反粒子态；一个能量为 $E$、动量为 $\vec{p}$、自旋为 $s$ 的粒子和一个能量为 $E'$、动量为 $\vec{p}'$、自旋为 $s'$ 的反粒子，共两个粒子的状态……。

## §5. 库仑规范的电磁场和光子

用电磁势 $A_\mu$ 描述的电磁场，要在一定的规范条件下才会有意义。但规范条件却给它带来量子化困难。因此，电磁场的量子化，是比较困难的。这里，我们讨论库仑规范下的情况。

**经典场** 电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \tag{3-70}$$

库仑规范条件为

$$A^0 = 0, \quad \nabla\cdot\vec{A} = 0 \tag{3-71}$$

由于 $A^0 = 0$，(3-70) 式可以写成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) - \frac{1}{2}\dot{A}^i\dot{A}_i,$$

而

$$-\frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) = -\frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^i A^j$$

$$+\frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^j A^i,$$

$$\partial_i A_j \partial^j A^i = \partial_i(A_j \partial^j A^i) - A_j \partial^j \partial_i A^i = \partial_i(A_j \partial^j A^i)。$$

第二个等式是由于 $\nabla\cdot\vec{A} = 0$。拉格朗日密度中的散度项，积分后成为面积分，以致为零。因而对作用量没有贡献，可以略去。所以，在库仑规范下的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^i A^j - \frac{1}{2}\dot{A}_i \dot{A}^i。 \tag{3-72}$$

由此可知，$A^i$ 可以看作是正则坐标，而正则动量为

$$\pi^i=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^i}=-\dot{A}_i=\dot{A}^i。\qquad(3\text{-}73)$$

场的能量、动量为

$$H=\int(\pi^i\dot{A}^i-\mathscr{L})d^3x=\frac{1}{2}\int(\dot{A}^i\dot{A}^i+\nabla A^i\cdot\nabla A^i)d^3x,\qquad(3\text{-}74)$$

$$\vec{p}=-\int\pi^i\nabla A^i d^3x=-\int\dot{A}^i\nabla A^i d^3x。$$

**量子化** 把正则坐标$A^i(\vec{x},t)$和正则动量$\dot{A}^i(\vec{x}',t)$ 看作算符，满足正则对易关系

$$[A^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x}',t)]=i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$[A^i(\vec{x},t),\ A^j(\vec{x}',t)]=0,\ [\dot{A}^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x}',t)]=0,$$

就完成了量子化手续。这是前面几节行之有效的办法。可是，在这里却行不通。对上列第一式求导，得

$$\partial_i[A^i(\vec{x},t),\ \dot{A}^j(\vec{x}',t)]=\partial_i i\delta_{ij}\delta^3\ (\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$[\partial_i A^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x}',t)]=i\partial_j\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

由于库仑规范，$\partial_i A^i=0$，上式成为

$$0=i\partial_j\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\neq 0,$$

这是荒谬的。

之所以如此，是由于三对正则坐标 $A^i$、正则动量 $\dot{A}^i$（$i=1,2,3$）中，因规范条件 $\partial_i A^i=0$ 的限制，只有两对是独立的。上述的量子化方法，对独立的正则坐标和正则动量是正确的，对非独立的正则坐标和正则动量就需要修改。为此，我们把它用两对独立的正则变量展开

$$A^i(\vec{x},t)=\sum_{\vec{k},\lambda}q_{k,\lambda}(t)\varepsilon^i(k,\lambda)\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}},$$

(3-75)

$$\pi^i(\vec{x},t)=\sum_{\vec{k},\lambda}p_{k,\lambda}(t)\varepsilon^i(k,\lambda)\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}},$$

$\varepsilon(k,\lambda)$，$\lambda=1,2$ 是第一章引入的横极化矢量，$\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}(k,\lambda)=0$。这保证了 $A^i$、$\pi^i$ 满足库仑规范条件

$$\nabla\cdot\vec{A}=\sum_{\vec{k},\lambda}q_{k,\lambda}(t)i\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}=0,$$

$$\nabla\cdot\vec{\pi}=\sum_{\vec{k},\lambda}p_{k\lambda}(t)(-i\vec{k})\cdot\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}=0,$$

而

$$\frac{1}{V}\int_V e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}d^3x=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

是正交、规一化的。所以

$$q_{k,\lambda}(t),p_{k,\lambda}(t)(\lambda=1,2)$$

与 $A^i$、$\pi^i$ 相应，就是两对独立的正则算符，满足对易关系

$$[q_{k,\lambda}(t),p_{k',\lambda'}(t)]=i\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'},[q_{k,\lambda}(t),q_{k',\lambda'}(t)]=0,$$

$$[p_{k\lambda}(t),p_{k'\lambda'}(t)]=0。\tag{3-76}$$

由 (3-75) 式，(3-76)式，就可以导出 $A^i$、$\dot{A}^i$ 满足的正则对易关系

$$[A^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x}',t)]=i\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\tag{3-77}$$

$$[A^i(\vec{x},t),A^j(\vec{x}',t]=0,\ [\dot{A}^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x}',t)]=0。$$

例如

$$[A^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x}',t)]=\left[\sum_{\vec{k},\lambda}q_{k\lambda}(t)\varepsilon^i(k,\lambda)\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}},\right.$$

$$\sum_{\vec{k}',\lambda'} p_{k',\lambda'}(t)\varepsilon^j(k',\lambda')\frac{e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\Big]$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k}'\cdot\vec{x}')}}{V}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')[q_{k,\lambda}(t),p_{k',\lambda'}(t)]$$

$$=i\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k}'\cdot\vec{x}')}}{V}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$=i\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{V}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k,\lambda)$$

$$=i\sum_{\vec{k}}\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{\vec{k}^2}\right)\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{V}$$

$$=i\left(\delta^{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\sum_{\vec{k}}\frac{1}{V}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$=i\left(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$=i\left(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')。$$

这里，在倒数第二个等式中，用到了

$$\sum_{\vec{k}}=\int\frac{Vd^3k}{(2\pi)^3},\quad \sum_{\vec{k}}\frac{1}{V}=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{3-78}$$

$Vd^3k$ 是相空间的大小，$h^3$ 是相格的体积，$h^3=(2\pi)^3\hbar^3=(2\pi)^3$，$Vd^3k/(2\pi)^3$ 就是相格数。对相格的求和，在连续变量的情况下，就成为对相空间的积分。

显然，(3-77) 式表示的量子化对易关系，是满足库仑规范条件的。

$$\partial_i[A^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x}',t)]=i\partial_i\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$\partial_i A^i = 0,\ \partial_i\left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2}\right) = \partial^j - \frac{\nabla^2\partial^j}{\nabla^2} = 0。$$

正则坐标和正则动量，象通常一样，满足正则运动方程

$$\dot{A}^i = i[H, A^i], \ddot{A}^i = i[H, \dot{A}^i], \tag{3-79}$$

把 (3-74) 式表示的 $H$ 代入上式，得

$$\ddot{A}^i(\vec{x},t) = i[H, \dot{A}^i(\vec{x},t)] = i\left[\frac{1}{2}\int\left(\dot{A}^j(\vec{x}',t)\dot{A}^j(\vec{x}',t)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nabla' A^j(\vec{x}',t)\cdot\nabla' A^j(\vec{x}',t)\right)d^3x', \dot{A}^i(\vec{x},t)\right]$$

$$= i\int d^3x'\nabla' A^j(\vec{x}',t)\cdot\nabla'[A^j(\vec{x}',t), \dot{A}^i(\vec{x},t)]$$

$$= i\int d^3x'\nabla' A^j(\vec{x}',t)\nabla' i\left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$= \nabla^2\left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2}\right)A^j(\vec{x},t) = \nabla^2 A^i(\vec{x},t),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)A^i(x) = 0, \tag{3-80}$$

这就是算符的波动方程。

**一般解** 满足波动方程和库仑规范条件的$\vec{A}$

$$\partial^\mu\partial_\mu\vec{A} = 0,\quad \nabla\cdot\vec{A} = 0$$

有如 (1-132) 式所示的平面波解。由其叠加就得到一般解

$$\vec{A}(x) = \sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\left(a(k,\lambda)e^{-ikx} + a^+(k,\lambda)e^{ikx}\right)。\tag{3-81}$$

$\vec{\varepsilon}(k,\lambda)$，如 (1-123) 式、(1-124) 式、(1-125) 式、(1-126) 式所示，是正交、规一的横极化矢量

$$\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\vec{\varepsilon}(k,\lambda') = \delta_{\lambda,\lambda'},$$

$$\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}(k,\lambda) = 0 \tag{3-82}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k,\lambda) = \delta^{ij} - \frac{k^ik^j}{\vec{k}^2}。$$

平面波因子，也是正交、规一的

$$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e^{-ikx},\int f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}f_{k'}(x)d^3x=\delta_{\vec{k},\vec{k'}}。\quad(3\text{-}83)$$

由此可以推出

$$a(k,\lambda)=\int f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\vec{A}(x)d^3x,\quad(3\text{-}84)$$

、

$$a^+(k,\lambda)=\int\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\vec{A}(x)i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}f_k(x)d^3x。$$

**动量、极化函数算符** 如上所述，量子化的电磁场可以用时空函数算符 $\vec{A}(x)$、$\dot{\vec{A}}(x)$ 描述，也可以用动量、极化函数算符 $a(k,\lambda)$、$a^+(k,\lambda)$ 表征。它们之间由（3-81）式、（3-84）式联系。时空函数算符 $\vec{A}(x)$、$\dot{\vec{A}}(x)$ 满足对易关系（3-77）式，由它可以导出动量、极化函数 $a(k,\lambda)$、$a^+(k,\lambda)$ 满足的对易关系

$$[a(k,\lambda),a^+(k',\lambda')]=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'},[a(k,\lambda),a(k',\lambda')]=0,$$

$$[a^+(k,\lambda),a^+(k',\lambda')]=0。\quad(3\text{-}85)$$

例如

$$[a(k,\lambda),a^+(k',\lambda')]=\Big[\int f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\varepsilon^i(k,\lambda)A^i(x)d^3x,$$

$$\int\varepsilon^j(k',\lambda')A^j(x')i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}f_{k'}(x')d^3x'\Big]$$

$$=-\int d^3xd^3x'\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\Big[f_k^*(x)\dot{A}^i(x)-\dot{f}_k^*(x)A^i(x),$$

$$A^j(x')\dot{f}_{k'}(x')-\dot{A}^j(x')f_{k'}(x')\Big]$$

$$=-\int d^3xd^3x'\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\Big\{f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')\Big[\dot{A}^i(\vec{x},t),$$

$$A^j(\vec{x'},t)\Big]+\dot{f}^*_k(x)f_{k'}(x')\Big[A^i(\vec{x},t),\dot{A}^j(\vec{x'},t)\Big]\Big\}$$

$$=\int d^3x d^3x'\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')(f^*_k(x)\dot{f}_{k'}(x')-\dot{f}^*_k(x)f_{k'}(x'))$$

$$i\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})$$

$$=\int d^3x\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2}\right)$$

$$(f^*_k(x)i\dot{f}_{k'}(x')-i\dot{f}^*_k(x)f_{k'}(x'))_{x=x'}$$

$$=\int d^3x\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{\vec{k}^2}\right)f^*_k(x)i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}f_{k'}(x)$$

$$=\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\vec{\varepsilon}(k',\lambda')\int d^3x f^*_k(x)i\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}f_{k'}(x)=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}\text{。}$$

把(3-81)式代入(3-74)式，得

$$H=\frac{1}{2}\int(\dot{A}^i\dot{A}^i+\nabla A^i\cdot\nabla A^i)d^3x$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2}\int d^3x\,(-\omega\omega'-\vec{k}\cdot\vec{k}')\frac{\varepsilon^i(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\Big(a(k,\lambda)e^{-ikx}$$

$$-a^+(k,\lambda)e^{ikx}\Big)\frac{\varepsilon^i(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\Big(a(k',\lambda')e^{-ik'x}-a^+(k',\lambda')e^{ik'x}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{4V}\int d^3x\frac{(-\omega\omega'-\vec{k}\cdot\vec{k}')}{\sqrt{\omega\omega'}}\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\vec{\varepsilon}(k',\lambda')$$

$$\Big(a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-i(k+k')x}-a(k,\lambda)a^+(k',\lambda')e^{-i(k-k')x}$$

$$-a^+(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{i(k-k')x}+a^+(k,\lambda)a^+(k',\lambda')e^{i(k+k')x}$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\frac{(-\omega\omega'-\vec{k}\cdot\vec{k}')}{4\sqrt{\omega\omega'}}\vec{\varepsilon}(k',\lambda')\vec{\varepsilon}(k',\lambda')$$

$$\Big\{\Big(a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-i2\omega t}+a^+(k,\lambda)a^+(k',\lambda')e^{i2\omega t}\Big)\delta_{\vec{\lambda},-\vec{k}}$$

$$-\Big(a^+(k,\lambda)a(k',\lambda')+a(k,\lambda)a^+(k',\lambda')\Big)\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\Big\}$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\omega}{2}\sum_{\lambda'}\overrightarrow{\varepsilon(k,\lambda)}\cdot\overrightarrow{\varepsilon(k,\lambda')}\Big(a^+(k,\lambda)a(k,\lambda')$$

$$+a(k,\lambda)a^+(k,\lambda')\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\omega}{2}\sum_{\lambda'}\delta_{\lambda\lambda'}\Big(a^+(k,\lambda)a(k,\lambda')+a(k,\lambda)a^+(k,\lambda')\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\omega\Big(a^+(k,\lambda)a(k,\lambda)+\frac{1}{2}\Big)$$

$$\vec{p}=-\int\dot{A}^i\nabla A^i d^3x$$

$$=-\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\omega\vec{k}'\frac{\varepsilon^i(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\Big(a(k,\lambda)e^{-ikx}-a^+(k,\lambda)e^{ikx}\Big)$$

$$\frac{\varepsilon^i(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\Big(a(k',\lambda')e^{-ik'x}-a^+(k',\lambda')e^{ik'x}\Big)$$

$$=-\frac{1}{2V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\frac{\omega\vec{k}'}{\sqrt{\omega\omega'}}\overrightarrow{\varepsilon(k,\lambda)}\cdot\overrightarrow{\varepsilon(k',\lambda')}$$

$$\{a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-i(k+k')x}+a^+(k,\lambda)a^+(k',\lambda')e^{i(k+k')x}$$

$$-a(k,\lambda)a^+(k',\lambda')e^{-i(k-k')x}-a^+(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{i(k-k')x}\}$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k},\lambda'}-\frac{\omega\vec{k}'}{2\sqrt{\omega\omega'}}\overrightarrow{\varepsilon(k,\lambda)}\cdot\overrightarrow{\varepsilon(k',\lambda')}\Big\{a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-i2\omega t}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}$$

$$+a^+(k,\lambda)a^+(k',\lambda')e^{i2\omega t}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}-a(k,\lambda)a^+(k',\lambda')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

$$-a^+(k,\lambda)a(k',\lambda')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\Big\}$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{2}\vec{k}\{a(k,\lambda)a^+(k,\lambda)+a^+(k,\lambda)a(k,\lambda)\}。$$

所以场的能量、动量为

$$H=\sum_{\vec{k},\lambda}\omega\Big(a^+(k,\lambda)a(k,\lambda)+\frac{1}{2}\Big),\tag{3-86}$$

$$\vec{p}=\sum_{\vec{k},\lambda}\vec{k}\left(a^{+}(k,\lambda)a(k,\lambda)\right)。\qquad (3\text{-}86)$$

**光子** 描述量子化电磁场的动量、极化函数算符 $a(k,\lambda)$、$a^{+}(k,\lambda)$，满足对易关系 (3-85) 式，并以 $N(k,\lambda)=a^{+}(k,\lambda)a(k,\lambda)$ 的形式出现在 (3-86) 式中，和克莱因-戈登场的情况相似。所以，我们可以把 $a(k,\lambda)$、$a^{+}(k,\lambda)$、$N(k,\lambda)$ 叫做光子的消灭算符、产生算符、光子数算符，光子的能量为 $\omega=|\vec{k}|$、动量为 $\vec{k}$、极化为 $\lambda=1,2$。

令

$$|0>,\ a(k,\lambda)|0>=0$$

为真空态，则

$$a^{+}(k,\lambda)|0>;\ \frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+}(k,\lambda)^{n}|0>,\cdots\cdots \qquad (3\text{-}87)$$

是一个能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$、极化为 $\lambda$ 的光子态；$n$ 个能量为 $\omega$、动量为 $\vec{k}$、极化为 $\lambda$ 的光子态……。

## §6. 洛仑兹规范的电磁场和光子

库仑规范下，电磁场和光子的表述的意义是清楚的。但是，它是非相对论性的。在一个坐标系中，满足库仑规范条件 $A_0=0,\nabla\cdot\vec{A}=0$，在另一个坐标系中，就未必满足库仑规范条件。从理论的角度看来，它是不足的。洛仑兹规范是相对论性的，没有这个缺点。

**经典场** 电磁场的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$$

$$=-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu,$$

$$\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) - A_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu,$$

第一项是散度项，不起作用；第二项因洛仑兹条件而为零。所以洛仑兹规范下的电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu, \tag{3-88}$$

正则坐标为 $A_\mu(x)$，正则动量为

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu(x)。 \tag{3-89}$$

场的能量、动量为

$$H = \int (\pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathscr{L}) d^3x = -\frac{1}{2}\int (\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A^\mu) d^3x,$$
$$\tag{3-90}$$
$$\vec{p} = -\int \pi_\mu \nabla A^\mu d^3x = \int \dot{A}_\mu \nabla A^\mu d^3x。$$

**量子化** 把 $A_\mu$ 和 $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$ 看作正则共轭算符，满足正则对易关系

$$[A_\mu(\vec{x},t), -\dot{A}^\nu(\vec{x'},t)] = ig^\nu_\mu \delta^3(\vec{x}-\vec{x'}),$$
$$[A_\mu(\vec{x},t), \dot{A}_\nu(\vec{x'},t)] = -ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}),$$
$$\tag{3-91}$$
$$[A_\mu(\vec{x},t), A_\nu(\vec{x'},t)] = 0, \ [\dot{A}_\mu(\vec{x},t), \dot{A}_\nu(\vec{x'},t)] = 0,$$

其正则运动方程为

$$\dot{A}_\mu = i[H, A_\mu], \ \ddot{A}_\mu = i[H, \dot{A}_\mu]。 \tag{3-92}$$

这时，(3-90) 式也是算符，代入上式，得

$$\ddot{A}_\mu(\vec{x}, t) = -\frac{i}{2}[\int (\dot{A}_\nu(\vec{x'},t)\dot{A}^\nu(\vec{x'},t)$$
$$+ \nabla' A_\nu(\vec{x'},t)\cdot\nabla' A^\nu(\vec{x'},t)) d^3x', \dot{A}_\mu(\vec{x},t)]$$
$$= -i\int d^3x' \nabla' A^\nu(\vec{x'},t)\cdot\nabla'[A_\nu(\vec{x'},t), \dot{A}_\mu(\vec{x},t)]$$

$$= -\int d^3x' \nabla' A^\nu(\overrightarrow{x'},t)\cdot\nabla' g_{\mu\nu}\delta^3(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x'})$$

$$= \nabla^2 A_\mu(\overrightarrow{x},t),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)A_\mu(x)=0。\tag{3-93}$$

这就是算符的波动方程。

**一般解** 波动方程，如 (1-131) 式所示，有平面波解。诸平面波解的迭加，就构成它的一般解

$$A_\mu(x)=\sum_{\overrightarrow{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e_\mu(k,\lambda)\Big(a(k,\lambda)e^{-ikx}+\bar{a}(k,\lambda)e^{ikx}\Big),$$

$$A_\mu(x)=\sum_{\overrightarrow{k},\lambda}e_\mu(k,\lambda)\Big(a(k,\lambda)f_k(x)+\bar{a}(k,\lambda)f_k^*(x)\Big),\tag{3-94}$$

$e_\mu(k,\lambda)$ $(\lambda=1,2,3,4)$ 是四个极化矢量，其定义如 (1-127) 式所示

$$e^\mu(k,1)=(0,\overrightarrow{\varepsilon(k,1)}),\quad e^\mu(k,2)=(0,\overrightarrow{\varepsilon(k,2)}),$$

$$e^\mu(k,3)=\frac{k^\mu-\eta^\mu(k\cdot\eta)}{(k\cdot\eta)},\tag{3-95}$$

$$e^\mu(k,4)=i\eta^\mu,\quad \eta^\mu=(1,\overrightarrow{0})。$$

它们是正交、规一、完备的

$$e^\mu(k,\lambda)e_\mu(k,\lambda')=-\delta_{\lambda,\lambda'},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{4}e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k,\lambda)=-g_{\mu\nu},\tag{3-96}$$

$$k^\mu e_\mu(k,\lambda)=0,\lambda=1,2。$$

用 $i\overleftrightarrow{\partial}_t f_k^*(x)$ 右乘 (3-94) 式，积分后选出 $\overrightarrow{k}$ 分量，得

$$\int A_\mu(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}f_k^*(x)d^3x=-\sum_\lambda e_\mu(k,\lambda)a(k,\lambda)。$$

用 $e^\mu(k,\lambda)$ 乘上式，利用 (3-96) 式，得

$$a(k,\lambda)=\int e^{\mu}(k,\lambda)A_{\mu}(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}f_{k}^{*}(x)d^{3}x, \qquad (3\text{-}97)$$

同理可得

$$\overline{a}(k,\lambda)=\int f_{k}(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}e^{\mu}(k,\lambda)A_{\mu}(x)d^{3}x。 \qquad (3\text{-}98)$$

**动量、极化函数算符** 以上论述表明：电磁场可以用时空函数算符 $A_{\mu}(x)$、$-\dot{A}^{\mu}(x)$ 描述，也可以用动量、极化函数算符 $a(k,\lambda)$、$\overline{a}(k,\lambda)$ 表征。它们之间，由 (3-94) 式、(3-97) 式、(3-98) 式联系，对 (3-97) 式取厄米共轭，得

$$a^{+}(k,\lambda)=\int f_{k}(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}e^{*\mu}(k,\lambda)A_{\mu}(x)d^{3}x,$$

与 (3-98) 式比较，得

$$\begin{aligned}\overline{a}(k,i)&=a^{+}(k,i), \quad i=1,2,3,\\ \overline{a}(k,4)&=-a^{+}(k,4)。\end{aligned} \qquad (3\text{-}99)$$

动量、极化函数算符的对易关系，由 (3-91) 式可以推知

$$[a(k,\lambda),\overline{a}(k',\lambda')]=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'},\ [a(k,\lambda),a(k',\lambda')]=0,$$

$$[\overline{a}(k,\lambda),\overline{a}(k',\lambda')]=0。 \qquad (3\text{-}100)$$

例如

$$[a(k,\lambda),\overline{a}(k',\lambda')]=[\int e^{\mu}(k,\lambda)A_{\mu}(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}f_{k}^{*}(x)d^{3}x,$$

$$\int f_{k'}(x)i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}e^{\nu}(k',\lambda')A_{\nu}(x')d^{3}x']$$

$$=e^{\mu}(k,\lambda)e^{\nu}(k',\lambda')\int d^{3}xd^{3}x'[\dot{A}_{\mu}(x)f_{k}^{*}(x)-A_{\mu}(x)\dot{f}_{k}^{*}(x),$$

$$f_{k'}(x)\dot{A}_{\nu}(x')-\dot{f}_{k'}(x')A_{\nu}(x')]$$

$$=e^{\mu}(k,\lambda)e^{\nu}(k',\lambda')\int d^3xig_{\mu\nu}\left(f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x)-\dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x)\right)$$

$$=-e^{\mu}(k,\lambda)e_{\mu}(k,\lambda')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}。$$

把 (3-94) 式代入 (3-90) 式，得

$$H=-\frac{1}{2}\int d^3x(\dot{A}_{\mu}\dot{A}^{\mu}+\nabla A_{\mu}\cdot\nabla A^{\mu})$$

$$=-\frac{1}{2}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda,\lambda',\vec{k}'}\sum(-\omega\omega'-\vec{k}\cdot\vec{k}')e_{\mu}(k,\lambda)e^{\mu}(k',\lambda')\Big(a(k,\lambda)$$

$$f_k(x)-\overline{a}(k,\lambda)f_k^*(x)\Big)\Big((a(k',\lambda')f_{k'}(x)-\overline{a}(k',\lambda')f_{k'}^*(x)\Big)$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{(-\omega\omega'-\vec{k}\cdot\vec{k}')}{2\omega}e_{\mu}(k,\lambda)e^{\mu}(k',\lambda')$$

$$\Big\{a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-i2\omega t}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}-a(k,\lambda)\overline{a}(k',\lambda')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

$$-\overline{a}(k,\lambda)a(k',\lambda')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}+\overline{a}(k,\lambda)\overline{a}(k',\lambda')e^{i2\omega t}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\Big\}$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\lambda'}-\frac{\omega}{2}e_{\mu}(k,\lambda)e^{\mu}(k,\lambda')(\overline{a}(k,\lambda)a(k,\lambda')$$

$$+a(k,\lambda)\overline{a}(k,\lambda'))$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\omega\Big(\overline{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)+\frac{1}{2}\Big),$$

$$\vec{p}=\int\dot{A}_{\mu}\nabla A^{\mu}d^3x=\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\omega\vec{k}'e_{\mu}(k,\lambda)e^{\mu}(k',\lambda')$$

$$(a(k,\lambda)f_k(x)-\overline{a}(k,\lambda)f_k^*(x))(a(k',\lambda')f_{k'}(x)$$

$$-\overline{a}(k',\lambda')f_{k'}^*(x))$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{\vec{k}'}{2}e_{\mu}(k,\lambda)e^{\mu}(k',\lambda')\Big\{a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-i2\omega t}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}$$

$$-\overline{a}(k,\lambda)\overline{a}(k',\lambda')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

$$-\overline{a}(k,\lambda)a(k',\lambda')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}+\overline{a}(k,\lambda)\overline{a}(k',\lambda')e^{i2\omega t}\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}\Big\}$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\vec{k}}{2}\Big(\overline{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)+a(k,\lambda)\overline{a}(k,\lambda)\Big)。$$

用能量、动量、极化函数算符表示的场的能量、动量为

$$H=\sum_{\vec{k},\lambda}\omega\Big(\overline{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)+\frac{1}{2}\Big),$$

$$\vec{p}=\sum_{\vec{k},\lambda}\vec{k}\,\overline{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)。\tag{3-101}$$

**四种光子** 在场的能量、动量表示(3-101)式中,算符以

$$N(k,\lambda)=\overline{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)$$

的形式出现。由对易关系(3-100)式,可以证明

$$[N,a^+]=a^+,\ [N,a]=-a,$$

在 $N$ 的对角表象中,有

$$N|n\rangle=n|n\rangle,Na^+|n\rangle=(n+1)a^+|n\rangle,$$
$$Na|n\rangle=(n-1)a|n\rangle。$$

这表明:$N(k,\lambda)=\overline{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)$、$a^+_-(k,\lambda)$、$a(k,\lambda)$ 是光子的光子数算符、产生算符,消灭算符。光子的能量为 $\omega=|\vec{k}|$、动量为 $\vec{k}$、极化为 $\lambda=1,2,3,4$。$\lambda=1,2$ 的光子叫做横光子,$\lambda=3$ 的光子叫做纵光子,$\lambda=4$ 的光子叫做标量光子。

用

$$|0\rangle,\ a(k,\lambda)|0\rangle=0$$

表示真空态,则光子的状态,可以表示为

$$a^+_-(k,\lambda)|0\rangle,\ a^+(k,\lambda)a^+_-(k',\lambda')|0\rangle,\ a^+_-(k,\lambda)^n|0\rangle,\cdots\cdots$$

**存在问题** 以上论述,是相对论性的,可是有严重缺陷。首先,对易关系

$$[A_\mu(\vec{x},t),\dot{A}_\nu(\vec{x}',t)]=-ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

与洛仑兹条件是矛盾的。实际上，对上式求导 $\partial^\mu$，得

$$[\partial^\mu A_\mu(\vec{x},t),\ \dot{A}_\nu(\vec{x'},t)] = -i\partial_\nu\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}),$$

$$0 \neq 0。$$

其次，态矢的模可能是负的，能量也可能是负的。用 $a_4^+|0>$ 表示一个标量光子的状态，由 (3-100) 式、(3-99) 式，得

$$a_4\bar{a}_4 = 1 + \bar{a}_4 a_4,\ a_4 a_4^+ = -1 + a_4^+ a_4,$$

$$|a_4^+|0>|^2 = <0|a_4 a_4^+|0> = <0|(-1+a_4^+ a_4)|0> = -1,$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}a_4^{+2}|0>\right|^2 = \frac{1}{2}<0|a_4 a_4 a_4^+ a_4^+|0>$$

$$= \frac{1}{2}<0|a_4(-1+a_4^+ a_4)a_4^+|0>$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}<0|a_4 a_4^+ a_4 a_4^+|0>$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}<0|(-1+a_4^+ a_4)a_4 a_4^+|0> = 1,$$

……

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n!}}a_4^{+n}|0>\right|^2 = (-1)^n,$$

$$<n|N_4|n> = <n|\bar{a}_4 a_4|n> = -<n|a_4^+ a_4|n>$$

$$= -|a_4|n>|^2 = <n|n_4|n> = n_4||n>|^2。$$

当 $n_4$ = 奇数时，态矢的模是负的；当 $n_4$ = 偶数时，态矢的模是正的。作粒子数解释时，粒子数 $n_4$ 只能取正。但由于态矢量的模方可正可负，粒子数算符 $N$ 在态矢中的平均值也可正可负。这使由 (3-101) 式表示的能量算符，在粒子态间的平均值也可能是负的，而这是物理上不允许的。

实际上，纵光子和标量光子未被实验发现，实验测量得到的光子，都是横向极化的。

**洛仑兹条件** 当我们把洛仑兹条件写成

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0 \qquad (3\text{-}102)$$

时，它和对易关系是矛盾的。在经典电磁场的情况下，洛仑兹条件就是(3-102)式。量子化以后，场量 $A_\mu(x)$ 是算符，洛仑兹条件就不必仍取(3-102)式的形式。实际上，在量子理论中，算符(如 $A$)和态矢(如 $|a>$)，都没有直接的物理意义。有直接物理意义的，是算符在态矢中的平均值(如 $<a|A|a>$)和态矢的模(如 $<a|a>$)或标积(如 $<a|b>$)。它们和经典理论中的量互相对应。因此，人们设想：量子场论中的洛仑兹条件，不必以算符形式出现而可以用算符在态矢间的平均值来表征。令 $|\phi>$ 为物理上允许的状态，$\partial^\mu A_\mu$ 是算符，洛仑兹条件要求

$$<\phi|\partial^\mu A_\mu(x)|\phi>=0。\qquad (3\text{-}103)$$

它和经典场的洛仑兹条件相对应。显然，它和对易关系(3-91)式是不矛盾的。

如(3-94)式所示，算符 $A_\mu$ 可以分成正频部分 $A_\mu^+$ 和负频部分 $A_\mu^-$：

$$A_\mu(x)=A_\mu^+(x)+A_\mu^-(x),$$

$$A_\mu^+(x)=\sum_{\vec{k},\lambda}e_\mu(k,\lambda)a(k,\lambda)f_k(x),$$

$$A_\mu^-(x)=\sum_{\vec{k},\lambda}e_\mu(k,\lambda)\overline{a}(k,\lambda)f_k^*(x)。$$

可以证明，它们是相互厄米的

$$(A_\mu^-(x))^+=A_\mu^+(x)。$$

因此，(3-103)式可以写成

$$<\phi|\partial^\mu A_\mu^+|\phi>+<\phi|\partial^\mu A_\mu^-|\phi>=0,$$

$$<\phi|\partial^\mu A_\mu^+|\phi>+<\phi|\partial^\mu A_\mu^+|\phi>^*=0。$$

如果

$$\partial^\mu A_\mu^+(x)|\phi>=0,\qquad (3\text{-}104)$$

(3-103)式自然成立。故可把它看作洛仑兹条件。

把 $A_\mu^+(x)$ 的平面波表式代入(3-104)式，得

$$\sum_{\vec{k},\lambda}e_\mu(k,\lambda)a(k,\lambda)\partial^\mu f_k(x)|\phi>=0,$$

$$\sum_{\lambda} k^{\mu} e_{\mu}(k,\lambda) a(k,\lambda)|\phi\rangle = 0。$$

由于 $\lambda=1,2$ 是横向极化

$$k^{\mu} e_{\mu}(k,\lambda) = 0, \lambda = 1,2,$$

故上式可以写成

$$k^{\mu}(e_{\mu}(k,3)a(k,3) + e_{\mu}(k,4)a(k,4))|\phi\rangle = 0。$$

把 (3-95) 式代入，得

$$-k\cdot\eta(a(k,3) - ia(k,4))|\phi\rangle = 0,$$

$$(a(k,3) - ia(k,4))|\phi\rangle = 0。$$

对于任意的 $k$，此式都成立，故可写成

$$(a_3 - ia_4)|\phi\rangle = 0, \tag{3-105}$$

$$\langle\phi|(a_3^+ + ia_4^+) = 0。$$

这就是以消灭、产生算符表示的洛仑兹条件。$a_3$、$a_3^+$ 是纵光子的消灭算符和产生算符。$a_4$、$a_4^+$ 是标量光子的消灭算符和产生算符。它们的能量、动量是相同的，但都是任意的。只有满足 (3-105) 式的状态 $|\phi\rangle$，才是物理上允许的。

**纵光子和标量光子** 用 (3-103) 式、(3-104) 式、(3-105) 式表示的洛仑兹条件，不仅和对易关系不矛盾，还解决了纵光子和标量光子带来的困难。实际上，在能量、动量表达式 (3-101) 式中，出现的纵光子数和标量光子数算符之和为

$$N_3 + N_4 = \overline{a}_3 a_3 + \overline{a}_4 a_4 = a_3^+ a_3 - a_4^+ a_4$$

$$= \frac{1}{2}(a_3^+ - ia_4^+)(a_3 - ia_4) + \frac{1}{2}(a_3^+ + ia_4^+)(a_3 + ia_4),$$

由于洛仑兹条件 (3-105) 式，它们在物理态中的平均值为零

$$\langle\phi|N_3 + N_4|\phi\rangle = 0,$$

因而，场的能量、动量为

$$\langle\phi|H|\phi\rangle = \sum_{\vec{k}} \omega \langle\phi|a^+(k,1)a(k,1) + a^+(k,2)a(k,2)|\phi\rangle,$$

$$<\phi|\overrightarrow{p}|\phi> = \sum_{\vec{k}} \overrightarrow{k} <\phi|(a^+(k,1)a(k,1)$$

$$+a^+(k,2)a(k,2)|\phi>。\quad (3-106)$$

这表明：在物理上允许的态中，纵光子和标量光子对场的能量、动量没有贡献；而且，场的能量总是正的。

令

$$L(k) = a(k,3) - ia(k,4),$$

$$L^+(k) = a^+(k,3) + ia^+(k,4), \quad (3-107)$$

可以证明，它们是相互对易的，如

$$[L(k), L^+(k')] = [a(k,3) - ia(k,4), a^+(k',3) + ia^+(k',4)]$$

$$= [a(k,3), a^+(k',3)] + [a(k,4), a^+(k',4)]$$

$$= \delta_{\vec{k},\vec{k}'} - \delta_{\vec{k},\vec{k}'} = 0。$$

再令

$$R_f = 1 + \sum_{\vec{k}1} f(k_1)L^+(k_1) + \sum_{\vec{k}1,\vec{k}2} f(k_1k_2)L^+(k_1)L^+(k_2) + \cdots\cdots,$$

$$R_g = 1 + \sum_{\vec{k}1} g(k_1)L^+(k_1) + \sum_{\vec{k}1,\vec{k}2} g(k_1,k_2)L^+(k_1)L^+(k_2) + \cdots\cdots, \quad (3-108)$$

$f(k_1)$、$f(k_1、k_2)$、$g(k_1)$、$g(k_1、k_2)$……是任意的函数。显然，它们以及它们的厄米共轭 $R_f^+$、$R_g^+$ 之间，都是可以互相对易的

$$[R_f, R_g] = 0, \ [R_f, R_g^+] = 0。\quad (3-109)$$

用 $|\phi_0>$ 表示只有横光子、没有纵光子和标量光子的状态。显然，它们是满足洛仑兹条件的

$$L(k)|\phi_0> = 0,$$

而以 (3-108) 式定义的 $R_f$、$R_g$ 作用于 $|\phi_0>$，得

$$|\phi_f> = R_f|\phi_0>, |\phi_g> = R_g|\phi_0'>。$$

它们就是既有横光子，又有纵光子和标量光子的状态，而且满足

洛仑兹条件

$$L(k)|\phi_f\rangle = L(k)R_f|\phi_0\rangle = R_f L(k)|\phi_0 = 0,$$

$$L(k)|\phi_g\rangle = L(k)R_g|\phi'_0\rangle = R_g L(k)|\phi'_0\rangle = 0,$$

其标积为

$$\langle\phi_f|\phi_g\rangle = \langle\phi_0|R_f^+ R_g|\phi'_0\rangle$$

$$= \langle\phi_0|R_g R_f^+|\phi'_0\rangle = \langle\phi_0|\phi'_0\rangle。 \tag{3-110}$$

这表明，纵光子和标量光子对态矢的标积，也是没有贡献的。态矢的标积或模，不管态中有否纵、标光子，都只由态中的横光子确定。横光子态矢的模是正定的。这就排除了负模的困难。

综上所述，由于正确地给定洛仑兹条件(3-103)式、(3-104)式、(3-105)式，使纵光子和标量光子既对算符在物理态中的平均值无贡献，又对物理态的标积或模不起作用。因而，它们是无法测量的。这样，就去除了纵光子和标量光子引起的烦恼。从现在的理论观点看来，纵光子和标量光子，可以以虚粒子的形式出现。

## §7. 生成元和守恒量

在第二章中，我们系统论述了场的对称性和变换规律。那时，场量 $\phi_\alpha(x)$ 仅仅是时空坐标 $x$ 的函数，是经典场。所有的讨论，是在经典场的意义下进行的。量子化以后，场量 $\phi_\alpha(x)$ 和相应的 $\pi_\alpha(x)$，不仅是时空坐标 $x$ 的函数，还是希尔伯空间（粒子表象空间）的算符。因此，它们的对称性和变换规律，还需要考虑到算符的特点。当然，第二章的讨论和所得结果仍是有效的，是进一步讨论的基础。

**生成元** 在连续变换的情况下，场的本征变换，可以用一个幺正算符来实现

$$\phi_\alpha(x) \to \phi'_\alpha(x) = U\phi_\alpha(x)U^{-1},$$

$$\pi_\alpha(x) \to \pi'_\alpha(x) = U\pi_\alpha(x)U^{-1},$$

$$U = e^{iG}, \tag{3-111}$$
$$U^+ = U^{-1}, G^+ = G。$$
作为正则变量 $\phi_\alpha(x)$、$\pi_\alpha(x)$ 的任意函数或泛函，在上述变换下

$$F \to F' = UFU^{-1}$$
特别是场的哈密顿量的变换
$$H \to H' = UHU^{-1}$$
$G$ 是厄米算符，叫做生成元，包括一个任意的乘数因子。当这乘数因子很小，因而 $G$ 是小量时

$$
\begin{aligned}
&U = 1 + iG,\\
&\phi'_\alpha(x) = (1+iG)\phi_\alpha(x)(1-iG) = \phi_\alpha(x) + i[G, \phi_\alpha(x)],\\
&\delta\phi_\alpha(x) = \phi'_\alpha(x) - \phi_\alpha(x) = i[G, \phi_\alpha(x)],\\
&\delta\pi_\alpha(x) = i[G, \pi_\alpha(x)], \qquad (3\text{-}112)\\
&\delta F = i[G, F],\\
&\delta H = i[G, H]。
\end{aligned}
$$
(3-112) 式的左边，是生成元 $G$ 生成的场量的本征变化。

**守恒量** 量子化后的正则坐标 $\phi_\alpha(x)$ 和正则动量 $\pi_\alpha(x)$，不仅要满足正则对易关系，还要满足正则运动方程

$$\dot{\phi}_\alpha(x) = i[H, \phi_\alpha(x)], \quad \dot{\pi}_\alpha(x) = i[H, \pi_\alpha(x)],$$
正则变量的函数或泛函，其运动方程是
$$\dot{F} = i[H, F]。$$
如果 $F$ 不仅是正则变量 $\phi_\alpha(x)$、$\pi_\alpha(x)$ 的函数或泛函，因而是时间 $t$ 的隐函数，而且还是时间 $t$ 的显函数，那末它的运动方程就是

$$\dot{F} = i[H, F] + \frac{\partial F}{\partial t}。 \tag{3-113}$$

在经典场论中，诺依率尔定律指出：对称变换和守恒定律有紧密的联系；和对称变换相应，存在着守恒定律。在量子场论的情况下，这种联系由生成元和守恒量的对应关系表示出来。

如（3-112）式所示

$$\delta H = i[G, H]$$

是由生成元 $G$ 生成的哈密顿量 $H$ 的本征变化。我们把满足

$$\delta H = \frac{\partial G}{\partial t} \tag{3-114}$$

的变换叫做对称变换，生成元 $G$ 叫做对称变换生成元。与（3-113）式比较可知，这时

$$\dot{G} = 0,$$

即对称变换的生成元是守恒量。反之，若上式成立，由（3-113）式推知，（3-114）式也必成立，即守恒量是对称变换的生成元。

**定理** 对称变换的生成元是守恒量，守恒量是对称变换的生成元。这条定理，是诺依率尔定律的量子形式。

**时空平移** 如第二章所述，时空平移是一种对称变换，相应的守恒量是能量、动量

$$H = \int (\pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathscr{L})\, d^3x, \quad \vec{p} = -\int \pi_\alpha \nabla \phi_\alpha d^3x, \tag{3-115}$$

它们不显含时间。按照上述定理，它们是对称变换 $\delta H = 0$ 的生成元。可以直接证明，它们确实是时空平移变换的生成元。

在时空平移变换下，如（2-19）式、（2-22）式所示

$$\begin{aligned} &\delta X^\mu = \varepsilon^\mu, \\ &\phi(x) \to \phi'_\alpha(x') = \phi(x), \\ &\phi'_\alpha(x) = \phi(x - \delta x), \\ &\delta\phi_\alpha(x) = \phi'_\alpha(x) - \phi_\alpha(x) = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \phi_\alpha(x)。\end{aligned} \tag{3-116}$$

设想算符的本征变换由幺正算符

$$U = e^{iG}, G = -\varepsilon \cdot p \tag{3-117}$$

来完成。$p^\mu = (H, \vec{p})$ 是四维动量。则

$$\begin{aligned} &\phi'_\alpha(x) = U\phi_\alpha(x)U^{-1}, \\ &\delta\phi_\alpha(x) = i[-\varepsilon \cdot p, \phi_\alpha(x)]。\end{aligned} \tag{3-118}$$

在时间平移时，由（3-116）式

$$\delta\phi_\alpha(x) = -\varepsilon^0\dot{\phi}_\alpha(x),$$

而（3-118）式的右边

$$i[-\varepsilon^0 H,\phi_\alpha(x)] = -\varepsilon^0 i[H,\phi_\alpha(x)],$$

这时的（3-118）式就是正则运动方程。这就证明了：哈密顿量 $H$ 是时间平移的生成元。

在空间平移时，由（3-116）式

$$\delta\phi_\alpha(x) = -\vec{\varepsilon}\cdot\nabla\phi_\alpha(x),$$

而（3-118）式的右边

$$i[\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p},\phi_\alpha(x)] = i\vec{\varepsilon}\cdot\left[-\int\pi_\beta(\vec{x'},t)\nabla'\phi_\beta(\vec{x'},t)\,d^3x',\ \phi_\alpha(\vec{x},t)\right]$$

$$= i\vec{\varepsilon}\cdot\int d^3x' - [\pi_\beta(\vec{x'},t),\phi_\alpha(\vec{x},t)]\nabla'\phi_\beta(\vec{x'},t)$$

$$= i\vec{\varepsilon}\cdot\int d^3x' i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\nabla'\phi_\beta(\vec{x'},t)$$

$$= -\vec{\varepsilon}\cdot\nabla\phi_\alpha(x),$$

这就证明了 $\vec{p}$ 是空间平移的生成元。

上述的 $\varepsilon$ 是无穷小量。在有限大小的平移变换下，场量的本征变换，按（3-116）式为

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu,$$
$$\phi'_\alpha(x+a) = \phi_\alpha(x),$$
$$\phi'_\alpha(x) = \phi_\alpha(x-a),$$

按（3-117）式、（3-118）式为

$$\phi'_\alpha(x) = e^{-iap}\phi_\alpha(x)e^{iap},$$

二式相等，得

$$\phi_\alpha(x-a) = e^{-iap}\phi_\alpha(x)e^{iap},$$
$$\phi_\alpha(x+a) = e^{iap}\phi_\alpha(x)e^{-iap}。\qquad (3-119)$$

这是文献中常常采用的平移变换公式。对于任何能量、动量守恒的系统，都可以采用这个公式。

**时空转动** 如第二章所述，时空转动，即洛仑兹变换，也是一种对称变换，相应的守恒量是

$$J^{\nu\lambda}=\int(x^{\nu}J^{0\lambda}-x^{\lambda}J^{0\nu}-i\pi_{\alpha}S^{\nu\lambda}{}_{\alpha\beta}\phi_{\beta})d^3x。\tag{3-120}$$

按照上述定理，它们是对称变换的生成元。实际上，它们是洛仑兹变换的生成元。

在洛仑兹变换下

$$x^{\mu}\to x^{\mu\prime}=x^{\mu}+\varepsilon^{\mu}\,x\ ,$$

场的能量、动量是时空的四维矢量$p^{\mu}=(H,\overrightarrow{p})$，其变换为

$$p^{\mu}\to p^{\mu\prime}=p^{\mu}+\varepsilon^{\mu\nu}p_{\nu},$$

$$\tag{3-121}$$

$$\delta p^{\mu}=\varepsilon^{\mu\nu}p_{\nu}。$$

在空间转动下

$$\varepsilon^{0i}=0,\ \delta H=0,$$

$$\tag{3-122}$$

$$J^{ij}=\int(x^{i}T^{0j}-x^{j}T^{0i}-i\pi_{\alpha}S^{ij}{}_{\alpha\beta}\phi_{\beta})d^3x,$$

不显含时间 $t$。这表明 $J^{ij}$ 确实是空间转动的生成元。

在狭义的洛仑兹变换下

$$\varepsilon^{ij}=0,\ \delta H=\varepsilon^{0i}p_{i}=-\varepsilon^{0i}p^{i},\tag{3-123}$$

而相应的守恒量

$$J_{0i}=J^{i0}=\int(x^{i}T^{00}-x^{0}T^{0i}-i\pi_{\alpha}S^{0i}{}_{\alpha\beta}\phi_{\beta})d^3x$$

是时间 $t$ 的显函数

$$\frac{\partial J^{i0}}{\partial t}=-\int T^{0i}d^3x=-p^{i},\tag{3-124}$$

由是可知

$$\delta H=\frac{\partial J^{i0}}{\partial t}\varepsilon^{0i},\tag{3-125}$$

$J^{i0}$ 确实是狭义洛仑兹变换的生成元。

**内部空间的对称性** 在内部空间的转动下，如(2-116)式所示，场量的变换为

$$\phi_{\alpha i}(x)\to\phi'_{\alpha i}(x)=(e^{-i\theta^a\lambda^a})_{ij}\phi_{\alpha j}(x)$$
$$\simeq\phi_{\alpha i}(x)-i\theta^a\lambda^a_{ij}\phi_{\alpha j}(x),$$
$$\delta\phi_{\alpha i}(x)=-i\theta^a\lambda^a_{ij}\phi_{\alpha j}(x)。\tag{3-126}$$

如果是对称变换，其相应的守恒量，如(2-117)式所示，就是

$$Q^a=-i\int\pi_{\alpha i}(x)\lambda^a_{ij}\phi_{\alpha j}(x)d^3x。\tag{3-127}$$

按照前述定理，它也是该对称变换的生成元，满足关系。

$$\delta\phi_{\alpha i}(x)=i[\theta^aQ^a,\phi_{\alpha i}(x)]。\tag{3-128}$$

实际上，上式左边如(3-126)式所示，右边为

$$i\theta^a[Q^a,\phi_{\alpha i}(\vec{x},t)]$$
$$=\theta^a[\int\pi_{\beta i}(\vec{x'},t)\lambda^a_{ij}\phi_{\beta j}(\vec{x'},t)d^3x',\phi_{\alpha i}(\vec{x},t)]$$
$$\overset{\text{E}}{=}\theta^a\int d^3x'[\pi_{\beta k}(\vec{x'},t),\phi_{\alpha i}(\vec{x},t)]\lambda^a_{kj}\phi_{\beta j}(\vec{x'},t)$$
$$=-i\theta^a\int d^3x'\delta_{\beta\alpha}\delta_{ki}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\lambda^a_{kj}\phi_{\beta j}(\vec{x'},t)$$
$$=-i\theta^a\lambda^a_{ij}\phi_{\alpha j}(x)。$$

这就证明了：守恒量 $Q^a$ 是内部对称变换的生成元。

## §8. PCT变换的量子形式

上节讨论的是连续对称变换的量子形式。第二章 §5 讨论的PCT 变换是不连续的变换，是经典场的不连续变换。场量子化后，它是量子场的不连续变换的一部分。在这一节中，我们要考虑量子特点，考虑 PCT 变换的量子形式，考虑粒子算符和态矢的变换规律。

**空间反射** 定义为

$$\vec{x}\to\vec{x'}=-\vec{x},\ t\to t'=t$$

场量的变换，如(2-64)式、(2-65)式、(2-71)式所示，为

$$\phi'(\vec{x},t)=\pm\phi(-\vec{x},t),$$

$$\psi'(\vec{x},t)=\gamma_0\psi(-\vec{x},t), \tag{3-129}$$

$$\vec{A}'(\vec{x},t)=-\vec{A}(-\vec{x},t),\ A_0'(\vec{x},t)=A_0(-\vec{x},t),$$

量子化后，场量成为算符。场算符的本征变换，可以用一个粒子空间的幺正算符$P$来实现

$$\phi_\alpha'(x)=P\phi_\alpha(x)P^{-1}, \tag{3-130}$$

$\phi_\alpha(x)$是变换前的场算符，$\phi_\alpha'(x)$是本征变换后的算符。$P^+=P^{-1}$。考虑到(3-129)式，则有

$$P\phi(\vec{x},t)P^{-1}=\pm\phi(-\vec{x},t),$$

$$P\psi(\vec{x},t)P^{-1}=\gamma_0\psi(-\vec{x},t), \tag{3-131}$$

$$P\vec{A}(\vec{x},t)P^{-1}=-\vec{A}(-\vec{x},t),$$

$$PA_0(\vec{x},t)P^{-1}=A_0(-\vec{x},t)。$$

由此可以导出粒子算符和粒子态在空间反射下的变换规律。

**标量场** 场算符的变换规律是

$$P\phi(\vec{x},t)P^{-1}=\pm\phi(-\vec{x},t),$$

场算符的平面波展开是

$$\phi(x)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\Big(a(k)e^{-ikx}+b^+(k)e^{ikx}\Big),$$

由此得

$$P\phi(\vec{x},t)P^{-1}=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\Big(Pa(k)P^{-1}e^{-ikx}+Pb^+(k)P^{-1}e^{ikx}\Big),$$

$$\pm\phi(-\vec{x},t)=\sum_{\vec{k}}\frac{\pm1}{\sqrt{2V\omega}}\Big(a(k)e^{-i\omega t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$+b^+(k)e^{i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k}}\frac{\pm 1}{\sqrt{2V\omega}}\left(a(-\vec{k})e^{-ikx}+b^{+}(-\vec{k})e^{ikx}\text{。}\right)$$

两式相等，要求

$$Pa(\vec{k})P^{-1}=\pm a(-\vec{k}),$$

$$Pb^{+}(\vec{k})P^{-1}=\pm b^{+}(-\vec{k})\text{。} \qquad (3\text{-}132)$$

取厄米得

$$Pa^{+}(\vec{k})P^{-1}=\pm a^{+}(-\vec{k}),$$

$$Pb(\vec{k})P^{-1}=\pm b(-\vec{k})\text{。}$$

这就是标量粒子算符，在空间反射下的变换规律。对于态矢，如

$$Pa^{+}(\vec{k})|0>=Pa^{+}(k)P^{-1}P|0>=\pm a^{+}(-\vec{k})|0>,$$

$$(3\text{-}133)$$

$$Pb^{+}(\vec{k})|0>=\pm b^{+}(-\vec{k})|0>,$$

这里假定$P|0>=|0>$，真空是空间反射不变的。(3-133)式表明：动量为$\vec{k}$的粒子、反粒子态，在空间反射下，变成动量为$-\vec{k}$的粒子、反粒子态。取 +1 或 -1，由粒子的宇称是正或负确定。正、反标量粒子的宇称相同。

**旋量场** 场算符的变换规律是

$$P\psi(\vec{x},t)P^{-1}=\gamma_0\psi(-\vec{x},t),$$

场算符的平面波展开是

$$\psi(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left(c(p,s)u(p,s)e^{-ipx}+d^{+}(p,s)v(p,s)e^{ipx}\right),$$

由此得

$$P\psi(\vec{x},t)P^{-1}=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(Pc(p,s)P^{-1}u(p,s)e^{-ipx}$$

$$+Pd^{+}(p,s)P^{-1}v(p,s)e^{ipx}\Big),$$

$$\gamma_0\psi(-\vec{x},t)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c(p,s)\gamma_0 u(p,s)e^{-iEt-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$+d^+(p,s)\gamma_0 v(p,s)e^{iEt+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big)。$$

在标准表示中

$$\gamma_0=\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix},\ u(p,s)=\begin{vmatrix}\chi_s\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_s\end{vmatrix},\ \ v(p,s)=\begin{vmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_s\\ \chi_s\end{vmatrix},$$

$$\gamma_0 u(p,s)=u(-\vec{p},s),\gamma_0 v(p,s)=-v(-\vec{p},s),$$

$$\gamma_0\psi(-\vec{x},t)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c(p,s)u(-\vec{p},s)e^{-iEt-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$-d^+(p,s)v(-\vec{p},s)e^{iEt+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c(-\vec{p},s)u(p,s)e^{-ipx}-d^+(-\vec{p},s)v(p,s)e^{ipx}\Big)。$$

与$P\psi(\vec{x},t)P^{-1}$相等要求

$$Pc(\vec{p},s)P^{-1}=c(-\vec{p},s),$$

$$Pd^+(\vec{p},s)P^{-1}=-d^+(-\vec{p},s)。\tag{3-134}$$

取厄米得

$$Pc^+(\vec{p},s)P^{-1}=c^+(-\vec{p},s),$$

$$Pd(\vec{p},s)P^{-1}=-d(-\vec{p},s)。$$

这是旋量粒子算符在空间反射下的变换规律。由此推出态矢的变换规律是

$$Pc^+(p,s)|0\rangle=c^+(-\vec{p},s)|0\rangle,$$

$$Pd^+(p,s)|0\rangle=-d^+(-\vec{p},s)|0\rangle。\tag{3-135}$$

动量为$\vec{p}$的粒子、反粒子态，在空间反射下，成为动量为$-\vec{p}$的粒

子、反粒子态。正、反旋量粒子的宇称相反。

**光子场** 在库仑规范下的场算符的变换为

$$P\vec{A}(\vec{x},t)P^{-1}=-\vec{A}(-\vec{x},t),$$

场算符的平面波展开为

$$\vec{A}(x)=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\vec{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\left(a(k,\lambda)e^{-ikx}+a^{+}(k,\lambda)e^{ikx}\right),$$

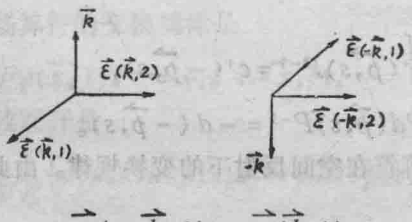
由此得

$$P\vec{A}(x)P^{-1}=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\vec{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\Big(Pa(k,\lambda)P^{-1}e^{-ikx}+Pa^{+}(k,\lambda)P^{-1}e^{ikx}\Big),$$

$$-\vec{A}(-\vec{x},t)=-\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\vec{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\Big(a(k,\lambda)e^{-i\omega t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}+a^{+}(k,\lambda)e^{i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\Big)$$

$$=-\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\vec{\varepsilon}(-\vec{k},\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\Big(a(-\vec{k},\lambda)e^{-ikx}+a^{+}(-\vec{k},\lambda)e^{ikx}\Big)。$$

极化矢量$\vec{\varepsilon}(k,1)$、$\vec{\varepsilon}(k,2)$、$\vec{k}$在空间反射下，保持右螺旋关系，如下图所示。显然




$$\vec{\varepsilon}(-\vec{k},1)=-\vec{\varepsilon}(\vec{k},1),$$

$$\vec{\varepsilon}(-\vec{k},2)=\vec{\varepsilon}(\vec{k},2)。$$

在这样的约定下，

$$-\vec{A}(-\vec{x},t)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}(\vec{\varepsilon}(k,1)a(-\vec{k},1)e^{ikx}$$

$$- \vec{\varepsilon}(k,2)a(-\vec{k},2)e^{ikx} + \vec{\varepsilon}(k,1)a^{+}(-\vec{k},1)e^{-ikx}$$
$$- \vec{\varepsilon}(k,2)a^{+}(-\vec{k},2)e^{-ikx}),$$

与$P\vec{A}(x)P^{-1}$相等,要求

$$\begin{aligned} Pa(k,\lambda)P^{-1} &= (-1)^{\lambda+1}a(-\vec{k},\lambda), \\ Pa^{+}(k,\lambda)P^{-1} &= (-1)^{\lambda+1}a^{+}(-\vec{k},\lambda)。\end{aligned} \tag{3-136}$$

这是光子算符的反射规律。态矢的反射规律为

$$Pa^{+}(k,\lambda)|0\rangle = (-1)^{\lambda+1}a^{+}(-\vec{k},\lambda)|0\rangle, \tag{3-137}$$

光子的动量反号。不同极化的光子,宇称相反。

以上是线偏振 $\lambda=1,2$ 的情况。定义圆偏振算符

$$\begin{aligned} a^{+}(k,+) &= a^{+}(k,1) + ia^{+}(k,2), \\ a^{+}(k,-) &= a^{+}(k,1) - ia^{+}(k,2), \end{aligned} \tag{3-138}$$

在空间反射下,由(3-136)式得

$$\begin{aligned} Pa^{+}(k,+)P^{-1} &= a^{+}(-\vec{k},-), \\ Pa^{+}(k,-)P^{-1} &= a^{+}(-\vec{k},+), \\ Pa^{+}(k,+)|0\rangle &= a^{+}(-\vec{k},-)|0\rangle, \\ Pa^{+}(k,-)|0\rangle &= a^{+}(-\vec{k},+)|0\rangle。\end{aligned} \tag{3-139}$$

光子的动量由$\vec{p}$转变成$-\vec{p}$。右旋极化光变成左旋极化光,左旋极化光变成右旋极化光。

**电荷共轭变换** 时空坐标不变,作为时空波函数的场量,如(2-72)式、(2-86)式、(2-88)式所示,变换为

$$\begin{aligned} &\phi^{c}(x) = \phi^{+}(x), \\ &\psi^{c}(x) = C\tilde{\bar{\psi}}(x), \overline{\psi^{c}}(x) = -\tilde{\psi}(x)C^{-1}, \\ &C^{-1}\gamma_{\mu}C = -\tilde{\gamma}_{\mu}, \ C^{+} = C^{-1}, \ \tilde{C} = -C, \end{aligned} \tag{3-140}$$

$$A^c_\mu(x) = -A_\mu(x)。$$

量子化以后,$\phi(x)$、$\psi(x)$、$A_\mu(x)$作为算符,其变换可以用粒子表象空间的幺正算符 $\mathscr{C}$ 来实现,即

$$\phi^c_\alpha(x) = \mathscr{C}\phi_\alpha(x)\mathscr{C}^{-1}。\qquad (3\text{-}141)$$

与(3-140)式比较,得

$$\mathscr{C}\phi(x)\mathscr{C}^{-1} = \phi^+(x),\ \mathscr{C}\phi^+(x)\mathscr{C}^{-1} = \phi(x),$$

$$\mathscr{C}\psi(x)\mathscr{C}^{-1} = C\widetilde{\overline{\psi}}(x),\mathscr{C}\overline{\psi}(x)\mathscr{C}^{-1} = -\widetilde{\psi}(x)C^{-1},\qquad (3\text{-}142)$$

$$\mathscr{C}A_\mu(x)\mathscr{C}^{-1} = -A_\mu(x)。$$

由此可以推出粒子算符和态矢的变换规律。

**标量场** 在电荷共轭变换下,场算符的变换为

$$\mathscr{C}\phi(x)\mathscr{C}^{-1} = \phi^+(x),$$

场算符的平面波展开,有

$$\mathscr{C}\phi(x)\mathscr{C}^{-1} = \sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left(\mathscr{C}a(k)\mathscr{C}^{-1}e^{-ikx} + \mathscr{C}b^+(k)\mathscr{C}^{-1}e^{ikx}\right),$$

$$\phi^+(x) = \sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left(a^+(k)e^{ikx} + b(k)\,e^{-ikx}\right)。$$

由此推知

$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}a(k)\mathscr{C}^{-1} = b(k),\\
&\mathscr{C}b^+(k)\mathscr{C}^{-1} = a^+(k),\\
&\mathscr{C}a^+(k)|0> = b^+(k)|0>,\\
&\mathscr{C}b^+(k)|0> = a^+(k)|0>。
\end{aligned}\qquad (3\text{-}143)$$

这表明:正粒子变成反粒子,反粒子变成正粒子。所以,电荷共轭变换又叫做正反粒子变换。

**旋量场** 场算符的变换是

$$\mathscr{C}\psi(x)\mathscr{C}^{-1} = C\widetilde{\overline{\psi}}(x),$$

用平面波展开,有

$$\mathscr{C}\psi(x)\mathscr{C}^{-1} = \sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}(\mathscr{C}c(p,s)\mathscr{C}^{-1}u(p,s)e^{-ipx}$$

$$+\mathscr{C}d^{+}(p,s)\mathscr{C}^{-1}v(p,s)e^{ipx},$$

$$C\overline{\widetilde{\psi}}(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c^{+}(p,s)C\overline{\widetilde{u}}(p,s)e^{ipx}$$

$$+d(p,s)C\overline{\widetilde{v}}(p,s)e^{-ipx}\Big),$$

**C** 是 $4\times4$ 矩阵，满足关系

$$C^{-1}\gamma_{\mu}C=-\widetilde{\gamma}_{\mu},\ C^{+}=C^{-1},\ \widetilde{C}=-C。$$

在标准表象中

$$C=i\gamma^{0}\gamma^{2}=i\alpha_{2}=\begin{vmatrix}0 & i\sigma_{2}\\ i\sigma_{2} & 0\end{vmatrix},\ u(p,s)=\begin{vmatrix}\chi_{s}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{s}\end{vmatrix},$$

$$v(p,s)=\begin{vmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{s}\\ \chi_{s}\end{vmatrix},$$

$$C\overline{\widetilde{u}}(p,s)=(-1)^{s}v(p,\bar{s}),\quad C\overline{\widetilde{v}}(p,s)=(-1)^{s+1}u(p,\bar{s})。$$

$\bar{s}\neq s$ 表示两种不同的自旋取向。上式的证明，如

$$\bar{u}(p,s)=u^{+}(p,s)\gamma_{0}=\left|\chi_{s}^{+},\ \chi_{s}^{+}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right|\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\left|\chi_{s}^{+},\ -\chi_{s}^{+}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right|,$$

$$\overline{\widetilde{u}}(p,s)=\begin{vmatrix}\chi_{s}\\ -\vec{\sigma}^{*}\vec{p}\chi_{s}\end{vmatrix},\quad C\overline{\widetilde{u}}(p,s)=\begin{vmatrix}0 & i\sigma_{2}\\ i\sigma_{2} & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\chi_{s}\\ -\vec{\sigma}^{*}\cdot\vec{p}\chi_{s}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}i\sigma_{2}\chi_{s}\\ i\sigma_{2}\chi_{s}\end{vmatrix},$$

$$i\sigma_{2}\chi_{1}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\ -1\end{vmatrix}=-\chi_{2},$$

$$i\sigma_{2}\chi_{2}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix}=\chi_{1},$$

$$i\sigma_2\chi_s=(-1)^s\chi_{\bar{s}},\ C\tilde{\bar{u}}(p,s)=(-1)^s\begin{vmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{\bar{s}}\\ \chi_{\bar{s}}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^s v(p,\bar{s}),$$

$$\bar{v}(p,s)=v^+(p,s)\gamma_0=\begin{vmatrix}\chi_s^+\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\chi_s^+\end{vmatrix},$$

$$\tilde{\bar{v}}(p,s)=\begin{vmatrix}\vec{\sigma}^*\cdot\vec{p}\chi_s\\ -\chi_s\end{vmatrix},$$

$$C\tilde{\bar{v}}(p,s)=\begin{vmatrix}0 & i\sigma_2\\ i\sigma_2 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\vec{\sigma}^*\cdot\vec{p}\chi_s\\ -\chi_s\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}i\sigma_2\chi_s\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}i\sigma_2\chi_s\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{s+1}\begin{vmatrix}\chi_{\bar{s}}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{\bar{s}}\end{vmatrix}=(-1)^{s+1}u(p,\bar{s})。$$

由此得

$$C\tilde{\bar{\psi}}(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c^+(p,s)(-1)^s v(p,\bar{s})e^{ipx}$$

$$+d(p,s)(-1)^{s+1}u(p,\bar{s})e^{-ipx}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{p},\bar{s}}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big((-1)^{\bar{s}}c^+(p,\bar{s})v(p,s)e^{ipx}$$

$$+(-1)^{\bar{s}+1}d(p,\bar{s})u(p,s)e^{-ipx}\Big)。$$

与 $\mathscr{C}\psi(x)\mathscr{C}^{-1}$ 相等,要求

$$\begin{aligned}&\mathscr{C}c(p,s)\mathscr{C}^{-1}=(-1)^{\bar{s}+1}d(p,\bar{s}),\\ &\mathscr{C}d^+(p,s)\mathscr{C}^{-1}=(-1)^{\bar{s}}c^+(p,\bar{s}),\\ &\mathscr{C}c^+(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}+1}d^+(p,\bar{s})|0\rangle,\\ &\mathscr{C}d^+(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}}c^+(p,\bar{s})|0\rangle。\end{aligned}\tag{3-144}$$

这表明：电荷共轭变换使正费米子变成反费米子，反费子变成正费米子,而且自旋取向反转。

**光子场**　场算符的变换为

$$\mathscr{C} A_\mu(x)\mathscr{C}^{-1} = -A_\mu(x),$$

场算符的平面波展开为

$$A_\mu(x)=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e_\mu(k,\lambda)\Big(a(k,\lambda)e^{-ikx}+\overline{a}(k,\ \lambda)e^{ikx}\Big),$$

因而

$$\mathscr{C} A_\mu(x)\mathscr{C}^{-1}=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e_\mu(k,\lambda)(\mathscr{C} a(k,\lambda)\mathscr{C}^{-1}e^{-ikx}$$

$$+\mathscr{C}\overline{a}(k,\lambda)\mathscr{C}^{-1}e^{ikx})。$$

与 $-A_\mu(x)$ 相等，推出

$$\begin{aligned}&\mathscr{C} a(k,\lambda)\mathscr{C}^{-1}=-a(k,\lambda),\\&\mathscr{C} a^+(k,\lambda)\mathscr{C}^{-1}=-a^+(k,\lambda),\\&\mathscr{C} a^+(k,\lambda)|0>=-a^+(k,\lambda)|0>。\end{aligned}\tag{3-145}$$

这表明：光子态是电荷共轭变换的本征态，本征值为 $-1$。光子没有反粒子，其电荷共轭宇称为负。

**时间反演**　定义为

$$\vec{x}\to\vec{x}'=\vec{x},\ t\to t'=-t$$

场量的变换，如(2-90)式、(2-96)式、(2-98)式所示，

$$\begin{aligned}&\phi'(\vec{x},t)=\phi(\vec{x},-t),\\&\psi'(\vec{x},t)=T\psi(\vec{x},-t),\\&T^{-1}\widetilde{\gamma}_\mu T=\gamma_\mu,\ T^+=T^{-1},\ \widetilde{T}=-T,\\&\vec{A}'(\vec{x},t)=-\vec{A}(\vec{x},-t),\end{aligned}\tag{3-146}$$

作为算符，可以由一反幺正算符 $\mathscr{T}=U\mathscr{K}$ 来实现

$$\phi'_a(x)=\mathscr{T}\phi(x)\mathscr{T}^{-1},\tag{3-147}$$

$U$ 是粒子表象空间的幺正算符，$\mathscr{K}$ 是复数运算

$$U^+=U^{-1},\ \mathscr{K}a\mathscr{K}^{-1}=a^*,\ \mathscr{K}i\mathscr{K}^{-1}=-i。\tag{3-148}$$

实现时间反演的算符，是反幺正的，而不是幺正的。原因在于正则对易关系，如

$$[\phi(\vec{x},t)\dot{\phi}(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

在时间反演变换下，也应该是不变的。由上式，有

$$\mathscr{T}[\phi(\vec{x},t),\dot{\phi}(\vec{x}',t)]\mathscr{T}^{-1}=\mathscr{T}i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\mathscr{T}^{-1},$$

$$\left[\mathscr{T}\phi(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1},\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{T}\phi(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}\right]=\mathscr{T}i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\mathscr{T}^{-1},$$

$$\left[\phi(\vec{x},-t),\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x}',-t)\right]=\mathscr{T}i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\mathscr{T}^{-1},$$

$$-[\phi(\vec{x},t'),\dot{\phi}(\vec{x}',t')\ ]=-i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$[\phi(\vec{x},t'),\dot{\phi}(\vec{x}',t')]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

这必需$\mathscr{T}i\mathscr{T}^{-1}=-i$。

因此，量子场的时间反演变换，由（3-146）式、（3-147）式、（3-148）式推知为

$$\mathscr{T}\phi(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\phi(\vec{x},-t),$$

$$\mathscr{T}\psi(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}=T\psi(\vec{x},-t),$$

$$\mathscr{T}\vec{A}(\vec{x},t)\mathscr{T}=-\vec{A}(\vec{x},-t)。$$

由此可以推出粒子算符和态矢的变换规律。

**标量粒子**　场算符的时间反演变换为

$$\mathscr{T}\phi(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\phi(\vec{x},-t),$$

场算符的平面波展开为

$$\phi(\vec{x},t)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left(a(k)e^{-ikx}+b^+(k)e^{ikx}\right),$$

$$\mathscr{T}\phi(\vec{x},t)\mathscr{T}=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left(Ua(k)U^{-1}e^{ikx}+Ub^+(k)U^{-1}e^{-ikx}\right),$$

$$\phi(\vec{x},-t)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left(a(k)e^{i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}+b^+(k)e^{-i\omega t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)$$

$$=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left(a(-\vec{k})e^{ikx}+b^+(-\vec{k})e^{-ikx}\right)。$$

由此推知

$$
\begin{aligned}
&Ua(k)U^{-1}=a(-\vec{k}),\\
&Ub^{+}(k)U^{-1}=b^{+}(-\vec{k}),\\
&Ua^{+}(k)|0>=a^{+}(-\vec{k})|0>,\\
&Ub^{+}(k)|0>=b^{+}(-\vec{k})|0>。
\end{aligned}
\tag{3-149}
$$

在时间反演下,粒子的动量$\vec{k}$改变符号,变成$-\vec{k}$。

**旋量粒子** 旋量场算符的时间反演变换为

$$\mathscr{T}\psi(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}=T\psi(\vec{x},-t),$$

其平面波展开为

$$\psi(\vec{x},t)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c(p,s)u(p,s)e^{-ipx}+d^{+}(p,s)v(p,s)e^{ipx}\Big),$$

$$\mathscr{T}\psi(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\sum_{\vec{p},k}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(Uc(p,s)U^{-1}U^{*}(p,s)e^{ipx}+Ud^{+}(p,s)U^{-1}v^{*}(p,s)e^{-ipx}\Big),$$

$$T\psi(\vec{x},-t)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c(p,s)Tu(p,s)e^{iEt+i\vec{p}\cdot\vec{x}}+d^{+}(p,s)Tv(p,s)e^{-iEt-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big)。$$

在标准表示中

$$T^{-1}\widetilde{\gamma_{\mu}}T=\gamma_{\mu},\ T^{+}=T^{-1},\ \widetilde{T}=-T,$$

$$T=\gamma^{1}\gamma^{3}=-\alpha_{1}\alpha_{3}=-\begin{vmatrix}0&\sigma_{1}\\\sigma_{1}&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&\sigma_{3}\\\sigma_{3}&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\sigma_{1}\sigma_{3}&0\\0&\sigma_{1}\sigma_{3}\end{vmatrix},$$

$$u(p,s)=\begin{vmatrix}\chi_{s}\\\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{s}\end{vmatrix},v(p,s)=\begin{vmatrix}\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_{s}\\\chi_{s}\end{vmatrix},$$

$$Tu(p,s)=-\begin{vmatrix}\sigma_{1}\sigma_{3}&0\\0&\sigma_{1}\sigma_{3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\chi_{s}\\\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{s}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\sigma_{1}\sigma_{3}\chi_{s}\\\sigma_{1}\sigma_{3}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{s}\end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \sigma_1\sigma_3\chi_s \\ -\vec{\sigma}^*\cdot\vec{p}\sigma_1\sigma_3\chi_s \end{vmatrix},$$

$$\sigma_1\sigma_3\chi = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \chi_2,$$

$$\sigma_1\sigma_3\chi_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -\chi_1,$$

$$\sigma_1\sigma_3\chi_s = (-1)^{s+1}\chi_{\bar{s}},$$

$$Tv(p,s) = -\begin{vmatrix} \sigma_1\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_s \\ \chi_s \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \sigma_1\sigma_3\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_s \\ \sigma_1\sigma_3\chi_s \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -\vec{\sigma}^*\cdot\vec{p}\sigma_1\sigma_3\chi_s \\ \sigma_1\sigma_3\chi_s \end{vmatrix},$$

$$Tu(p,s) = (-1)^s u^*(-\vec{p},\bar{s}),$$

$$Tv(p,s) = (-1)^s v^*(-\vec{p},\bar{s}),$$

$$T\psi(\vec{x},-t) = \sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c(p,s)(-1)^s u^*(-\vec{p},\bar{s})e^{iEt+i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$+d^+(p,s)(-1)^s v^*(-\vec{p},\bar{s})e^{-iEt-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}(-1)^{\bar{s}}\Big(c(-\vec{p},\bar{s})u^*(p,s)e^{ipx}$$

$$+d^+(-\vec{p},\bar{s})v^*(p,s)e^{-ipx}\Big)。$$

与$\mathscr{T}\psi(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}$相等，导致

$$Uc(p,s)U^{-1} = (-1)^{\bar{s}}c(-\vec{p},\bar{s}),$$

$$Ud^+(p,s)U^{-1} = (-1)^{\bar{s}}d^+(-\vec{p},\bar{s}), \tag{3-150}$$

$$Uc^+(p,s)|0\rangle = (-1)^{\bar{s}}c^+(-\vec{p},\bar{s})|0\rangle,$$

$$Ud^+(p,s)|0\rangle = (-1)^{\bar{s}}d^+(-\vec{p},\bar{s})|0\rangle。$$

这表明：在时间反演变换下，费米子的动量改变方向，自旋取向也倒转。

**光子** 在时间反演下，光子场算符的变换为

$$\mathscr{T}\vec{A}(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}=-\vec{A}(\vec{x}-t),$$

而平面波展开是

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\Big((a(k,\lambda)e^{-ikx}+a^{+}(k,\lambda)e^{ikx}\Big),$$

$$\mathscr{T}\vec{A}(\vec{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\Big(Ua(k,\lambda)U^{-1}e^{ikx}$$

$$+Ua^{+}(k,\lambda)U^{-1}e^{-ikx}),$$

$$-\vec{A}(\vec{x},-t)=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{-1}{\sqrt{2V\omega}}\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\Big(a(k,\lambda)e^{i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$+a^{+}(k,\lambda)e^{-i\omega t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{-1}{\sqrt{2V\omega}}\vec{\varepsilon}(-\vec{k},\lambda)\Big(a(-\vec{k},\lambda)e^{ikx}+a^{+}(-\vec{k},\lambda)e^{-ikx}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\sqrt{2V\omega}}\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\Big(a(-\vec{k},\lambda)e^{ikx}+a^{+}(-\vec{k},\lambda)e^{-ikx}\Big)。$$

由此可知

$$Ua(k,\lambda)U^{-1}=(-1)^{\lambda+1}a(-\vec{k},\lambda),$$

$$Ua^{+}(k,\lambda)U^{-1}=(-1)^{\lambda+1}a^{+}(-\vec{k},\lambda),\qquad(3\text{-}151)$$

$$Ua^{+}(k,\lambda)|0\rangle=(-1)^{\lambda+1}a^{+}(-\vec{k},\lambda)|0\rangle。$$

光子的动量$\vec{k}$改变方向，而偏振不变。不同极化的光子，时间宇称是不同的。$\lambda=1$ 的光子是正时间宇称，$\lambda=2$ 的光子是负时间宇称。

在圆偏振情况下

$$a^{+}(k,+)=a^{+}(k,1)+ia^{+}(k,2),$$

$$a^{+}(k,-)=a^{+}(k,1)-ia^{+}(k,2),$$

$$\mathscr{T}a^{+}(k,+)\mathscr{T}^{-1}=Ua^{+}(k,1)U^{-1}-iUa^{+}(k,2)U^{-1}$$

$$=a^{+}(-\vec{k},1)+ia^{+}(-\vec{k},2)$$

$$=a^{+}(-\vec{k},+), \tag{3-152}$$

$$\mathscr{T}a^{+}(k,-)\mathscr{T}^{-1}=Ua^{+}(k,1)U^{-1}+iUa^{+}(k,2)U^{-1}$$

$$=a^{+}(-\vec{k},1)-ia^{+}(-\vec{k},2)$$

$$=a^{+}(-\vec{k},-),$$

$$\mathscr{T}a^{+}(k,+)|0\rangle=a^{+}(-\vec{k},+)|0\rangle,$$

$$\mathscr{T}a^{+}(k,-1)|0\rangle=a^{+}(-\vec{k},-)|0\rangle。$$

在时间反演下，光子的动量$\vec{k}$要改变方向，极化状态不变。左旋、右旋光子的时间宇称是相同的。

## § 9. 相对论性的对易关系

正则量子化时，正则坐标和正则动量的对易关系，如(3-21)式所示，是等时的对易关系

$$[\phi_{\alpha}(\vec{x},t),\pi_{\beta}(\vec{x}',t)]=i\delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$[\phi_{\alpha}(\vec{x},t),\phi_{\beta}(\vec{x},t)]=0,[\pi_{\alpha}(\vec{x},t),\pi_{\beta}(\vec{x}'(t)]=0。$$

在费米场的情况下，上式中的对易子要换成反对易子

$$\{\phi_{\alpha}(\vec{x},t),\pi_{\beta}(\vec{x}',t)\}=i\delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$\{\phi_{\alpha}(\vec{x},t),\phi_{\beta}(\vec{x}',t)\}=0,\{\pi_{\alpha}(\vec{x},t),\pi_{\beta}(\vec{x}',t)\}=0。$$

这些对易关系是普适的。不管是什么类型的玻色场和费米场，也不管是自由场还是相互作用场，都是如此。所以，它们有基本的、重要的意义。

可是，从相对论的观点看来，等时是非相对论性的。在一

个坐标系中是等时的事件，在另外的坐标系中就会是不等时的。所以，上述的等时对易子，是非相对论性的，是不够完美的。因此，我们要讨论非等时的、相对论性的对易关系。例如，我们定义标量场、旋量场、电磁场的对易子为

$$
\begin{aligned}
& i\Delta(x_1-x_2)=[\phi(x_1),\phi^+(x_2)], \\
& iS_{\alpha}(x_1-x_2)=\{\psi_\alpha(x_1),\bar{\psi}_\beta(x_2)\}, \qquad (3\text{-}153) \\
& iD_{\mu\nu}(x_1-x_2)=[A_\mu(x_1),A_\nu(x_2)]。
\end{aligned}
$$

在自由场的情况下，用场算符的平面波展开，用产生、消灭算符的对易关系，可以算出它们的具体表示式。

**标量场** 场算符的平面波展开是

$$
\phi(x)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\Big(a(k)e^{-ikx}+b^+(k)e^{ikx}\Big),
$$

代入(3-153)式的第一式，得

$$
\begin{aligned}
[\phi(x_1),\phi^+(x_2)] &= \sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k'}}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}[a(k)e^{-ikx1}+b^+(k)e^{ikx1}, \\
& \quad a^+(k')e^{ik'x2}+b(k')e^{-ik'x2}] \\
&= \sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\Big(\delta_{\vec{k},\vec{k'}}e^{-ikx1+ik'x2}-\delta_{\vec{k},\vec{k'}}e^{ikx1-ik'x2}\Big) \\
&= \sum_{\vec{k}}\frac{1}{2V\omega}\Big(e^{-ik(x1-x2)}-e^{ik(x1-x2)}\Big) \\
&= \sum_{\vec{k}}\frac{1}{V}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x1}-\vec{x2})}\frac{1}{2\omega}\Big(e^{-i\omega(t1-t2)}-e^{i\omega(t1-t2)}\Big) \\
&= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x1}-\vec{x2})}\frac{1}{2\omega}\Big(e^{-i\omega(t1-t2)}-e^{i\omega(t1-t2)}\Big) \\
&= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x1}-\vec{x2})}\int dk_0\varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ik0(t1-t2)} \\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ik(x1-x2)},
\end{aligned}
$$

$$
\varepsilon(k_0)=\theta(k_0)-\theta(-k_0), \qquad \theta(k_0)=\begin{cases}1 \text{ 当 } k_0>0 \\ 0 \text{ 当 } k_0<0。\end{cases}
$$

由此可知，标量场算符的对易关系为

$$i\Delta(x_1-x_2)=[\phi(x_1),\phi^+(x_2)]$$

$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}\frac{1}{(2\omega)}\left(e^{-i\omega(t_1-t_2)}-e^{i\omega(t_1-t_2)}\right)$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ik(x_1-x_2)}。\tag{3-154}$$

**旋量场** 场算符的平面波展开是

$$\psi(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left(c(p,s)u(p,s)e^{-ipx}+d^+(p,s)v(p,s)e^{ipx}\right),$$

代入(3-153)式的第二式，得

$$\{\psi_\alpha(x_1),\overline{\psi}_\beta(x_2)\}=\sum_{\vec{p},s}\sum_{\vec{p}',s'}\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\Big[c(p,s)u_\alpha(p,s)e^{-ipx_1}$$

$$+d^+(p,s)v_\alpha(p,s)e^{ipx_1},c^+(p',s')\overline{u}_\beta(p',s')e^{ip'x_2}$$

$$+d(p',s')\overline{v}_\beta(p',s')e^{-ip'x_2}\Big]$$

$$=\sum_{\vec{p},s}\sum_{\vec{p}',s'}\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\Big(\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\delta_{s,s'}u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p',s')e^{-ipx_1+ip'x_2}$$

$$+\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\delta_{s,s'}v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p',s')e^{ipx_1-ip'x_2}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{p},s}\frac{m}{VE}\Big(u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p,s)e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$+v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p,s)e^{ip(x_1-x_2)}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE}\left((\gamma\cdot p+m)_{\alpha\beta}e^{-ip(x_1-x_2)}+(\gamma\cdot p-m)_{\alpha\beta}e^{ip(x_1-x_2)}\right)$$

$$=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE}\left(e^{-ip(x_1-x_2)}-e^{ip(x_1-x_2)}\right)$$

$$=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}i\Delta(x_1-x_2)。$$

由此可知，旋量场算符的对易关系为

$$iS(x_1-x_2)=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)i\Delta(x_1-x_2)。\tag{3-155}$$

**矢量场** 场算符的平面波展开是

$$A_\mu(x)=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e_\mu(k,\lambda)\left(a(k,\lambda)e^{-ikx}+\bar{a}(k,\lambda)e^{ikx}\right),$$

代入（3-153）的第三式，得

$$[A_\mu(x_1),A_\nu(x_2)]=\sum\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')$$

$$\Big[a(k,\lambda)e^{-ikx_1}+\bar{a}(k,\lambda)e^{ikx_1},a(k',\lambda')e^{-ik'x_2}$$

$$+\bar{a}(k',\lambda')e^{ik'x_2}\Big]$$

$$=\sum\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')\Big(\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}e^{-ikx_1+ik'x_2}$$

$$-\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}e^{ikx_1-ik'x_2}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{2V\omega}\ e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k,\lambda)\left(e^{-ik(x_1-x_2)}-e^{ik(x_1-x_2)}\right)$$

$$=-g_{\mu\nu}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{2V\omega}\left(e^{-ik(x_1-x_2)}-e^{ik(x_1-x_2)}\right)$$

$$=-g_{\mu\nu}i\Delta(x_1-x_2,m=0)。$$

由此可知，电磁场算符的对易关系为

$$iD_{\mu\nu}(x_1-x_2)=-g_{\mu\nu}i\Delta(x_1-x_2)。\tag{3-156}$$

**性质和特点** 由（3-155）式、（3-156）式看来，旋量对易子和矢量对易子，与标量对易子有线性联系。它们的性质和特点，是基本相同的。所以，我们可以由（3-154）式来看它们的基本性质和特点。

相对论性：在（3-154）式

$$i\Delta(x_1-x_2)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ik(x_1-x_2)}$$

的右端，有四个因子。$k(x_1-x_2)$ 是两矢量 $k$ 和 $(x_1-x_2)$ 的标积，是洛仑兹变换下的不变量。$k^2$ 是矢量 $k^\mu$ 的模，也是不变

的。在洛仑兹变换下 $d^4k \to d^4k' = Jd^4k$，$J$ 是雅科比行列式，$J=1$，故 $d^4k$ 也是不变的。$\delta(k^2-m^2)$ 使 $k^2=m^2>0$，$k^2=k_0^2-\vec{k}$ 是类时的，$k_0$ 的正、负不变，以致 $\varepsilon(k_0)$ 的正、负也不变。所以，对易子 $i\Delta(x_1-x_2)$ 是洛仑兹变换下不变的，是相对论性的。与 $i\Delta(x_1-x_2)$ 按(3-155) 式、(3-156)式确定的 $iS(x_1-x_2)$、$iD_{\mu\nu}(x_1-x_2)$ 也是相对论性的。

微观因果律：由 (3-154) 式

$$i\Delta(x_1-x_2)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}\frac{1}{2\omega}\left(e^{-i\omega(t_1-t_2)}-e^{i\omega(t_1-t_2)}\right)$$

推知，$t_1=t_2$ 时为零，即

$$i\Delta(\vec{x}_1-\vec{x}_2,0)=0, \tag{3-157}$$

$t_1-t_2=0$，$\vec{x}_1-\vec{x}_2\neq 0$时，

$$(x_1-x_2)^2=(t_1-t_2)^2-(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2<0,$$

是类空间隔。相对论告诉我们，时空间隔的类型是不变的。在一个坐标系中的类空间隔，在另一个坐标系中也是类空的。对于类空间隔的事件，总有一个坐标系，在该坐标系中看来，它们是同时发生的。前面说到 $i\Delta(x_1-x_2)$ 是洛仑兹变换下不变的，$t_1=t_2$ 时满足 (3-157) 式，在任何类空间隔中都应如此，即

$$i\Delta(x_1-x_2)=0,\quad (x_1-x_2)^2<0, \tag{3-158}$$

类空间隔的事件是没有因果关系的。没有因果关系的算符，可以对易或反对易，叫做微观因果律。(3-158) 式就是微观因果律的数学表达式。

等时对易子：(3-157) 式表示

$$[\phi(\vec{x}_1,t),\phi^+(\vec{x}_2,t)]=0,$$

对 (3-154) 式取时间导数

$$\frac{\partial}{\partial t_1}i\Delta(x_1-x_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}[\phi(x_1),\phi^+(x_2)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} \frac{1}{2\omega}(e^{-i\omega(t_1-t_2)} - e^{i\omega(t_1-t_2)})$$

$$= -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} \frac{1}{2}(e^{-i\omega(t_1-t_2)} + e^{i\omega(t_1-t_2)}),$$

当 $t_1 = t_2 = t$ 时，上式为

$$[\dot{\phi}(\vec{x}_1, t), \phi^+(\vec{x}_2, t)] = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}$$

$$= -i\delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2),$$

这表明：等时对易子是相对论性对易子的特例。

## §10. 自由传播子

在量子场论中，在计算过程发生的几率时，传播子具有十分重要的意义，常常用到它们的具体表示式。

**定义** 我们把两个场算符的编时乘积的真空平均值

$$<0|T\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2)|0> \tag{3-159}$$

叫做传播子，也叫两点格林函数。编时算符定义为

$$T\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2) = \begin{cases} \phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2), & t_1 > t_2 \\ \pm\phi_\beta(x_2)\phi_\alpha(x_1), & t_2 > t_1 \end{cases}$$

可以用跃阶函数 $\theta(t)$ 表示为

$$T\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2) = \theta(t_1 - t_2)\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2) \pm\theta(t_2 - t_1)\phi_\beta(x_2)\phi_\alpha(x_1)。 \tag{3-160}$$

当算符 $\phi_\alpha(x_1)$、$\phi_\beta(x_2)$ 都是费米算符时，上式的 ± 号中取 − 号，其它情况都取 + 号。

对于标量场、旋量场、电磁场，其传播子的定义为

$$\begin{aligned} i\Delta_f(x_1 - x_2) &= <0|T\phi(x_1)\phi^+(x_2)|0>, \\ iS_f(x_1 - x_2) &= <0|T\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0>, \\ iD_{f\mu\nu}(x_1 - x_2) &= <0|TA_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0>。 \end{aligned} \tag{3-161}$$

如果场算符是自由场算符，它们就是自由传播子。把场算符的平面波展开代入上式，就可以得到它们的具体表示式。

**标量场** 把自由标量场算符的平面波展开

$$\phi(x)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left(a(k)e^{-ikx}+b^{+}(k)e^{ikx}\right)$$

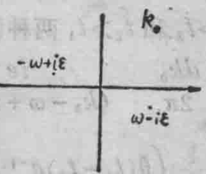
代入(3-161)式的第一式，得

$$\begin{aligned}
<0|T\phi(x_1)\phi^{+}(x_2)|0> &= \theta(t_1-t_2)<0|\phi(x_1)\phi^{+}(x_2)|0> \\
&\quad +\theta(t_2-t_1)<0|\phi^{+}(x_2)\phi(x_1)|0> \\
&= \theta(t_1-t_2)\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}<0|\left(a(k)e^{-ikx_1}+b^{+}(k)e^{ikx_1}\right) \\
&\quad (a^{+}(k')e^{ik'x_2}+b(k')e^{-ik'x_2})|0> \\
&\quad +\theta(t_2-t_1)\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}<0|(a^{+}(k')e^{ik'x_2} \\
&\quad +b(k')e^{-ik'x_2})(a(k)e^{-ikx_1}+b^{+}(k)e^{ikx_1})|0> \\
&= \theta(t_1-t_2)\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}<0|a(k)a^{+}(k')e^{-ikx_1+ik'x_2}|0> \\
&\quad +\theta(t_2-t_1)\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}} \\
&\quad <0|b(k')b^{+}(k)e^{-ik'x_2+ikx_1}|0> \\
&= \sum_{\vec{k},\vec{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\left(\theta(t_1-t_2)\delta_{\vec{k},\vec{k}'}e^{-ikx_1+ik'x_2}\right. \\
&\quad \left.+\theta(t_2-t_1)\delta_{\vec{k},\vec{k}'}e^{ikx_1-ik'x_2}\right) \\
&= \sum_{\vec{k}}\frac{1}{2V\omega}\left(\theta(t_1-t_2)e^{-ik(x_1-x_2)}+\theta(t_2-t_1)e^{ik(x_1-x_2)}\right) \\
&= \sum_{\vec{k}}\frac{1}{V}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}\frac{1}{2\omega}\left(\theta(t_1-t_2)e^{-i\omega(t_1-t_2)}\right. \\
&\quad \left.+\theta(t_2-t_1)e^{i\omega(t_1-t_2)}\right) \\
&= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}\frac{1}{2\omega}\left(\theta(t_1-t_2)e^{-i\omega(t_1-t_2)}\right.
\end{aligned}$$

$$+\theta(t_2-t_1)e^{i\omega(t_1-t_2)}\Big)。$$

上式中的傅立叶因子，可以用复平面的路积分

$$\int\frac{dk_0}{2\pi}\frac{ie^{-ik_0(t_1-t_2)}}{k_0^2-\vec{k}^2-m^2+i\varepsilon}$$



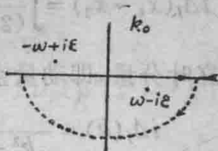

表示。被积函数的分母为

$$k_0^2-\vec{k}^2-m^2+i\varepsilon=(k_0-\omega+i\varepsilon)\times$$

$$(k_0+\omega-i\varepsilon),\quad \omega=\sqrt{\vec{k}^2+m^2},$$

被积函数有两个极点，如右图所示

$$k_0=\omega-i\varepsilon, k_0=-\omega+i\varepsilon,$$




路积分是沿实轴的积分。当 $t_1>t_2$ 时，可以把积分扩充成沿下半圆的积分。在圆周上

$$e^{-ik_0(t_1-t_2)}\to e^{-i(-i\infty)}=e^{-\infty}\to 0,$$

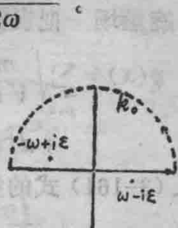
$$\int_{\rightarrow}\frac{dk_0}{2\pi}\frac{ie^{-ik_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+i\varepsilon)(k_0+\omega-i\varepsilon)}$$

$$=\oint\frac{dk_0}{2\pi}\frac{ie^{-ik_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+i\varepsilon)(k_0+\omega-i\varepsilon)},$$

回路包含了极点 $k_0=\omega-i\varepsilon$。按柯西定理，积分值为

$$-2\pi i\times\text{在极点}(k_0=\omega-i\varepsilon)\text{的留数}=\frac{e^{-i\omega(t_1-t_2)}}{2\omega}。$$

当 $t_2>t_1$ 时，可以把沿实轴的积分扩充为沿上半圆的积分。在圆周上




$$e^{-ik_0(t_1-t_2)}\to e^{-i(i\infty)(-1)}=e^{-\infty}\to 0,$$

$$\int_{\rightarrow}\frac{dk_0}{2\pi}\frac{ie^{-ik_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+i\varepsilon)(k_0+\omega-i\varepsilon)}$$

$$=\oint\frac{dk_0}{2\pi}\frac{ie^{-ik_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+i\varepsilon)(k_0+\omega-i\varepsilon)},$$

回路包含了极点 $k_0=-\omega+i\varepsilon$。按柯西定理，积分值为

$$2\pi i\times\text{在极点}\,(k_0=-\omega+i\varepsilon)\,\text{的留数}=\frac{e^{i\omega(t_1-t_2)}}{2\omega}。$$

把 $t_1>t_2$ 和 $t_2>t_1$ 两种情况合在一起，就有

$$\int\frac{dk_0}{2\pi}\frac{ie^{-ik_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+i\varepsilon)(k_0+\omega-i\varepsilon)}$$

$$=\frac{1}{2\omega}\Big(\theta(t_1-t_2)e^{-i\omega(t_1-t_2)}+\theta(t_2-t_1)e^{i\omega(t_1-t_2)}\Big)。$$

由此可知，标量场的自由传播子为

$$i\Delta_f(x_1-x_2)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ik(x_1-x_2)},\qquad(3\text{-}162)$$

其傅立叶分量，即动量空间的传播子为

$$i\Delta_f(k)=\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}。\qquad(3\text{-}163)$$

对 (3-162) 式求导，得

$$(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\Delta_f(x_1-x_2)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\times$$

$$(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)e^{-ik(x_1-x_2)}=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x_1-x_2)},$$

$$(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\Delta_f(x_1-x_2)=-\delta^4(x_1-x_2)。\qquad(3\text{-}164)$$

这表明：在经典意义上，$\Delta_f(x_1-x_2)$ 是达兰贝尔方程的格林函数。

**旋量场** 把自由旋量场算符的平面波展开

$$\psi(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\Big(c(p,s)u(p,s)e^{-ipx}$$

$$+d^+(p,s)v(p,s)e^{ipx}\Big),$$

代入 (3-161) 式的第二式，得

$$\langle 0|T\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi_\beta}(x_2)|0\rangle=\theta(t_1-t_2)\langle 0|\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi_\beta}(x_2)|0\rangle$$

$$-\theta(t_2-t_1)\langle 0|\overline{\psi_\beta}(x_2)\psi_\alpha(x_1)|0\rangle$$

$$=\theta(t_1-t_2)\sum_{\vec{p},s,\vec{p}',s'}\sum\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\langle 0|\Big(c(p,s)u_\alpha(p,s)e^{-ipx_1}$$

$$+d^+(p,s)v_\alpha(p,s)e^{ipx_1}\big)\big(c^+(p',s')\overline{u}_\beta(p's')e^{-ip'x_2}$$

$$+d(p',s')\overline{v}_{-}(p',s')e^{-ip'x_2}|0\rangle$$

$$-\theta(t_2-t_1)\sum_{\vec{p},s}\sum_{\vec{p}',s'}\cdot\frac{m}{V\sqrt{EE'}}$$

$$\langle 0|\Big(c^+(p',s')\overline{u}_\beta(p's')e^{ip'x_2}+d(p',s')\overline{v}_\beta(p',s')e^{-\overline{ip}'x_2}\Big)$$

$$\big(c(p,s)u_\alpha(p,s)e^{-ipx_1}+d^+(p,s)v_\alpha(p,s)e^{ipx_1}\big)|0\rangle$$

$$=\theta(t_1-t_2)\sum_{\vec{p},s\vec{p}',s'}\sum\frac{m}{V\sqrt{EE'}}$$

$$\langle 0|c(p,s)u_\alpha(p,s)e^{-ipx_1}c^+(p',s')\overline{u_\beta}(p',s')e^{ip'x_2}|0\rangle$$

$$-\theta(t_2-t_1)\sum_{\vec{p},s\vec{p}',s'}\sum\frac{m}{V\sqrt{EE'}}$$

$$\langle 0|d(p',s')\overline{v_\beta}(p's')e^{-ip'x_2}d^+(p,s)v_\alpha(p,s)e^{ipx_1}|0\rangle$$

$$=\theta(t_1-t_2)\sum_{\vec{p},s\vec{p}',s'}\sum\frac{m}{V\sqrt{EE'}}$$

$$\delta_{\vec{p}\cdot\vec{p}'}\delta_{s,s'}u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p',s')e^{-ipx_1+ip'x_2}$$

$$-\theta(t_2-t_1)\sum_{\vec{p},s\vec{p}'s'}\sum\frac{m}{V\sqrt{EE'}}$$

$$\delta_{\vec{p}\cdot\vec{p}'}\delta_{s,s'}v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p',s')e^{ipx_1-ip'x_2}$$

$$=\sum_{\vec{p},s}\frac{m}{VE}\Big(\theta(t_1-t_2)u_\alpha(p,s)\overline{u_\beta}(p,s)e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$-\theta(t_2-t_1)v_\alpha(p,s)\overline{v_\beta}(p,s)e^{ip(x_1-x_2)}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{p}}\frac{m}{VE}\Big(\theta(t_1-t_2)\frac{(\gamma\cdot p+m)_{\alpha\beta}}{2m}e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$-\theta(t_2-t_1)\frac{(\gamma\cdot p-m)_{\alpha\beta}}{2m}e^{ip(x_1-x_2)}\Big)$$

$$=\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE}\Big(\theta(t_1-t_2)(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\,e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$+\theta(t_2-t_1)(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}e^{ip(x_1-x_2)}\Big)$$

$$=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE}\Big(\theta(t_1-t_2)e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$+\theta(t_2-t_1)e^{ip(x_1-x_2)}\Big)$$

$$-\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE}(i\gamma^0_{\alpha\beta}\delta(t_1-t_2)e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$-i\gamma^0_{\alpha\beta}\delta(t_1-t_2)e^{ip(x_1-x_2)})$$

$$=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE}\Big(\theta(t_1-t_2)e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$+\theta(t_2-t_1)e^{ip(x_1-x_2)}\Big)。$$

由此可知，旋量场的自由传播子为

$$iS_f(x_1-x_2)=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)i\Delta_f(x_1-x_2)$$

$$=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip(x_1-x_2)},$$

$$iS_f(x_1-x_2)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{\gamma\cdot p-m+i\varepsilon}e^{-ip(x_1-x_2)}。\qquad(3\text{-}165)$$

其傅立叶分量，即动量空间的传播子为

$$iS_f(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m+i\varepsilon}。\qquad(3\text{-}166)$$

对 (3-165) 式求导

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)S_f(x_1-x_2)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$=\delta^4(x_1-x_2)。\qquad(3\text{-}167)$$

这表明：传播子 $iS_f(x_1-x_2)$，在经典意义上也是狄拉克方程的格林函数。

**矢量场** 把自由矢量场的平面波展开

$$A_\mu(x)=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e_\mu(k,\lambda)\Big(a(k,\lambda)e^{-ikx}+\overline{a}(k,\lambda)e^{ikx}\Big),$$

代入(3-161)式的第三式,得

$$<0|TA_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0>=\theta(t_1-t_2)<0|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0>$$
$$+\theta(t_2-t_1)<0|A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)|0>$$
$$=\theta(t_1-t_2)\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')$$
$$<0|\Big(a(k,\lambda)e^{-ikx_1}+\overline{a}(k,\lambda)e^{ik'x_1}\Big)$$
$$\Big(a(k',\lambda')e^{-ik'x_2}+\overline{a}(k',\lambda')e^{ik'x_2}\Big)|0>$$
$$+\theta(t_2-t_1)\sum_{\vec{k}',\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}$$
$$e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')<0|(a(k',\lambda')e^{-ik'x_2}+\overline{a}(k',\lambda')e^{ik'x_2})$$
$$(a(k,\lambda)e^{-ikx_1}+\overline{a}'(k,\lambda)e^{ikx_1})|0>$$
$$=\theta(t_1-t_2)\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}$$
$$e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')<0|a(k,\lambda)\overline{a}(k',\lambda')e^{-ikx_1\pm ik'x_2}|0>$$
$$+\theta(t_2-t_1)\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}$$
$$e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')<0|a(k',\lambda')\overline{a}(k,\lambda)e^{ikx_1-ik'x_2}|0>$$
$$=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{2V\omega}e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k,\lambda)\Big(\theta(t_1-t_2)e^{-ik(x_1-x_2)}$$
$$+\theta(t_2-t_1)\,e^{ik(x_1-x_2)}\Big)$$
$$=\sum_{\vec{k}}\frac{-1}{2V\omega}g_{\mu\nu}\Big(\theta(t_1-t_2)e^{-ik(x_1-x_2)}+\theta(t_2-t_1)e^{ik(x_1-x_2)}\Big)$$
$$=-g_\mu\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}\frac{1}{2\omega}(\theta(t_1-t_2)e^{-i\omega(t_1-t_2)}$$

$$+\theta(t_2-t_1)e^{i\omega(t_1-t_2)})。$$

由此可知，自由光子场的传播子

$$iD_{f\mu\nu}(x_1-x_2)=-g_{\mu\nu}i\Delta_f(x_1-x_2),$$

$$iD^f_{\mu\nu}(x_1-x_2)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}e^{-ik(x_1-x_2)}$$

$$iD^f_{\mu\nu}(k)=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}。\tag{3-168}$$

对 (3-168) 式求导

$$\partial^\lambda\partial_\lambda D^f_{\mu\nu}(x_1-x_2)=g_{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x_1-x_2)},$$

$$\partial^\lambda\partial_\lambda D^f_{\mu\nu}(x_1-x_2)=g_{\mu\nu}\delta^4(x_1-x_2)。\tag{3-169}$$

光子自由传播子是波动方程的格林函数。

**传播子的意义** 在导出传播子的具体表示式，如 (3-162) 式、(3-165)式、(3-168)式的过程中，我们看到：自由场算符的平面波展开，每一项都包含一个产生算符或消灭算符；两个算符的 $T$ 乘积的每一项，都包含两个算符，其形式为 $a_ia_j$，$a_ia_j^+$，$a_i^+a_j$，$a_i^+a_j^+$；它们的真空平均值为

$$<0|a_ia_j|0>=0,<0|a_i^+a_j|0>=0,<0|a_i^+a_j^+|0>=0,$$

$$<0|a_ia_j^+|0>=\delta_{ij}。$$

这表明：只有先产生一个粒子，随后消灭同一粒子的项，才对传播子有贡献。换句话说，传播子描述粒子产生随即消灭的过程。动量空间的传播子，如 (3-163) 式、(3-166)式、(3-168) 式所示，其动量是任意的，不在质壳上。传播子传播的是虚粒子。

## 习 题 三

1. 假设真空态矢量 $|0>$ 是规一化的 $<0|0>=1$，证明 $n$ 个全同粒子的态矢量 $|n>=\frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+n}|0>$，也是规一化的.

2。证明：平面波展开（3-50）式的逆变换是（3-51）式。

3。证明：复标量场的产生、消灭算符满足对易关系（3-52）式。

4。证明：复标量场的能量、动量，可以用产生、消灭算符表示为（3-53）式。

5。证明：如果狄拉克场也用对易子来量子化，那末其结果是和泡里原理不相容的。

6。证明：如果算符的运动方程不是 $\dot{\phi}_a = i[H, \phi_a]$，而是 $\dot{\phi}_a = i[H - H_i, \phi_a]$，那末，时间平移的生成元，就是 $H - H_i$ 而不是 $H$。

7。$\pi_0$ 介子的主要衰变道是：$\pi_0 \to 2\gamma$。试证：$\pi^0$ 是纯中性粒子，即它的反粒子就是它自己。

8。写出在 $PCT$ 联合变换下，粒子态矢量的变换规律，以及不变的拉格郎日密度算符。

9。时间反演有两种方案：一种方案是 $\mathscr{T} = U\mathscr{K}$，$U$ 是幺正算符，$\mathscr{K}$ 是复数共轭操作 $\mathscr{K} a \mathscr{K}^{-1} = a^*$；另一种方案是 $\mathscr{T} = U\mathscr{R}$，$U$ 是幺正算符，$\mathscr{R}$ 是使算符顺序倒转。$\mathscr{R} ab \mathscr{R}^{-1} = ba$。试证后一种方案，也是切实可行的，即也能保持运动方程和对易关系不变。

10。在库仑规范下，

$$A_0 = 0, \quad \overrightarrow{A}(x) = \sum_{\overrightarrow{k}, i} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} \overrightarrow{\varepsilon}(k,i) [a(k,i) e^{-ikx} + a^+_-(k,i) e^{ikx}],$$

试导出它的相对论性对易关系和自由传播子。

# 第四章 场的相互作用

前几章论述的都是自由场，没有涉及它们之间的相互作用。严格说来，自由场是不存在的，场都以一定的形式相互作用着。自由场可以看作相互作用场在一定条件下的极限情况。前几章的论述，是以后论述的基础。

就目前所知，相互作用有四种。它们是电磁作用、强作用、弱作用和引力作用。引力作用控制着天体的运动。原子构造、分子构造、固体液体等的形成，是电磁作用的结果。强作用使质子、中子构成原子核，使夸克构成强子。许多衰变现象，如$\beta$衰变，是由弱作用引发的。电磁作用的量子理论是量子电动力学、简称QED，是目前最精确的理论之一。强作用理论，有唯象的$\pi$N同位旋模型；有SU(3)规范量子色动力学，简称QCD。弱作用有四费米V-A理论，有弱电统-规范理论。统一场论的观点认为：几种相互作用，应该可以统一描述。经过人们的努力，弱电统一获得了成功，建立了GWS弱电统一规范理论。弱、电、强的统一，得到了初步的结果，人们称之为大统一理论。把引力也统一起来的企图，作了尝试，这就是超对称、超引力的部份内容。

建立相互作用理论，考虑的基本要求有三：对称性，简单性，可重正性。人们说，对称性控制着相互作用。这就是说，对称性在理论中居于主导地位。符合对称性要求的理论，是多种多样的，人们常常选用其中比较简单的。不知什么原因，正确的理论，的确是比较简单的。目前，有效的计算理论，还只有微扰论。高阶微扰计算都是发散的，可以用重正化方法消除。重正化就是通过重新定义质量、耦合常数等，以消除发散的一种理论

方法。相互作用的存在本身，也要求理论可以重正化。当然，检验真理的唯一标准是实践。所建立的理论正确与否，要由它的结论是否与实验结果相符来判定。

## §1. 电磁作用

电磁作用理论，不管是经典的麦克斯韦理论，还是量子的量子电动力学，都是最精确、最成功的理论之一。我们从规范不变的要求，来引入电磁作用。

**自由场的整体规范不变性** 自由的标量场 $\phi$、电磁场 $A_\mu$、旋量场 $\psi$，如第一章所述，其拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\phi &= \partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi-\mu^2\phi^+\phi,\\ \mathscr{L}_\psi &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi,\\ \mathscr{L}_A &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu。\end{aligned} \tag{4-1}$$

如第二章所述，在时空平移、洛仑磁变换和 $PCT$ 变换下，它们都是不变的。实际上，我们认为自由场有最大的对称性，要求它们在上述变换下不变，从而导出场量 $\phi$、$A_\mu$、$\psi$ 在各变换下的变换规律。当然，在时空空间，它们是对称，不变的。

在内部空间，即在不涉及时空变换的空间，定义规范变换为

$$\begin{aligned}&\phi\to\phi'=e^{-i\alpha}\phi, \qquad \phi^+\to\phi'^+=\phi^+e^{i\alpha},\\ &\psi\to\psi'=e^{-i\alpha}\psi, \qquad \overline{\psi}\to\overline{\psi}'=\overline{\psi}\,e^{i\alpha},\\ &A_\mu\to A'_\mu=A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha。\end{aligned} \tag{4-2}$$

显然，它是把 $\phi$、$\psi$ 的绕轴转动和 $A_\mu$ 的规范变换统一描述的一

种变换。

当$\alpha$与时空坐标$x$无关时，$\partial_\mu\alpha=0$，$A'_\mu=A_\mu$不变，各时空点的$\phi$、$\psi$转过同一角度$\alpha$。所以，我们把它叫做整体规范变换。这时，场量的导数和场量一样变换

$$\partial_\mu\phi\to\partial_\mu\phi'=e^{-i\alpha}\partial_\mu\phi, \tag{4-3}$$
$$\partial_\mu\psi\to\partial_\mu\psi'=e^{-i\alpha}\partial_\mu\psi,$$

因而

$$\phi^+\phi\to\phi^{+\prime}\phi'=\phi^+\phi,$$
$$\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi\to\partial_\mu\phi'^+\partial^\mu\phi'=\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi,$$
$$\mathscr{L}_\phi\to\mathscr{L}_{\phi'}=\mathscr{L}_\phi,$$
$$\overline{\psi}\psi\to\overline{\psi}'\psi'=\overline{\psi}\psi,$$
$$\overline{\psi}\partial_\mu\psi\to\overline{\psi}'\partial_\mu\psi'=\overline{\psi}\partial_\mu\psi,$$
$$\mathscr{L}_\psi\to\mathscr{L}_{\psi'}=\mathscr{L}_\psi。$$

这表明：自由场在整体规范变换下是不变的。

按照诺依率尔定理，存在相应的守恒定律，其守恒流和守恒荷为

$$\partial_\mu j^\mu=0,\qquad j^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial_\mu\partial_\alpha\phi}\delta\phi_\alpha,$$

$$\dot{Q}=0,\qquad Q=\int j^0d^3x=\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\delta\phi_\alpha d^3x。$$

在无穷小规范变换下，(4-2)式为

$$\delta\phi=-i\alpha\phi,\qquad \delta\phi^+=i\alpha\phi^+,$$
$$\delta\psi=-i\alpha\psi,$$
$$\delta A_\mu=0,$$

代入上式，就得到标量场的电流、电荷

$$i_\mu=i(\phi^+\partial_\mu\phi-\partial_\mu\phi^+\cdot\phi), \tag{4-4}$$

$$Q = i\int(\phi^+\dot{\phi} - \dot{\phi}^+\phi)d^3x;$$

旋量场的电流、电荷

$$j_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi, \tag{4-5}$$

$$Q = \int\psi^+\psi d^3x。$$

**定域规范不变性** 当$\alpha$与时空坐标$x$有关时，$\partial_\mu\alpha \neq 0$，如(1-113)式，(1-114)式所示

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha,$$

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},$$

$$\mathscr{L}_A \to \mathscr{L}'_A = \mathscr{L}_A。$$

$\mathscr{L}_A$是不变的。这时，$\phi$、$\psi$在各时空点的转角$\alpha(x)$是不同的故称定域规范变换。场量导数的变换，不再与场量的变换相同

$$\partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi' = \partial_\mu(e^{-i\alpha}\phi) \neq e^{-i\alpha}\partial_\mu\phi,$$

$$\partial_\mu\psi \to \partial_\mu\psi' = \partial_\mu(e^{-i\alpha}\psi) \neq e^{-i\alpha}\partial_\mu\psi,$$

因而自由拉格朗日密度不是不变的

$$\mathscr{L}_\phi \to \mathscr{L}'_\phi \neq \mathscr{L}_\phi,$$

$$\mathscr{L}_\psi \to \mathscr{L}'_\psi \neq \mathscr{L}_\psi。$$

人们认为，自然界是如此的和谐，以致描述它的规律的拉格朗日密度，在(4-2)式定义的规范变换下，不管$\alpha$是否与时空坐标$x$有关，不管是整体规范变换，还是定域规范变换，它们都应该保持不变。为此，我们把$\mathscr{L}_\phi$、$\mathscr{L}_\psi$中的场量的时空导数换成协变导数

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \tag{4-6}$$

在定域规范变换下，场量的协变导数和场量同样变换

$$\begin{aligned} D_\mu\phi \to D'_\mu\phi' &= (\partial_\mu - ieA'_\mu)\phi' \\ &= \left(\partial_\mu - ie\left(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha\right)\right)e^{-i\alpha}\phi \\ &= e^{-i\alpha}(-i\partial_\mu\alpha + \partial_\mu - ieA_\mu + i\partial_\mu\alpha)\phi \\ &= e^{-i\alpha}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \end{aligned}$$

$$= e^{-i\alpha} D_\mu \phi,$$

$$(D_\mu \phi)^+_- \to (D'_\mu \phi')^+_- = (D_\mu \phi)^+ e^{i\alpha},$$

$$D_\mu \psi' = D'_\mu \psi' = (\partial_\mu - ieA'_\mu)\psi'$$

$$= \left(\partial_\mu - ie\left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha\right)\right) e^{-i\alpha}\psi$$

$$= e^{-i\alpha} D_\mu \psi。$$

因而

$$\phi^+\phi \to \phi^{+\prime}\phi' = \phi^+\phi,$$

$$(D_\mu\phi)^+ D^\mu\phi \to (D'_\mu\phi')^+ D'^\mu\phi' = (D_\mu\phi)^+ D^\mu\phi,$$

$$\mathscr{L}_{\phi+i} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^+(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - \mu^2\phi^+\phi \text{ 不变；}$$

$$\overline{\psi}\psi \to \overline{\psi}'\psi' = \overline{\psi}\psi,$$

$$\overline{\psi} D_\mu\psi \to \overline{\psi}' D'_\mu\psi' = \overline{\psi} D_\mu\psi,$$

$$\mathscr{L}_{\psi+i} = \overline{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi \text{ 不变。}$$

**相互作用场** 由以上的论述可知，在规范变换下不变的拉格朗日密度，对于标量场$\phi$和电磁场$A_\mu$相互作用时，可以写成

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\phi+i} + \mathscr{L}_A = \mathscr{L}_\phi + \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_i,$$

$$\mathscr{L}_\phi = \partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^+\phi,$$

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu),$$

$$\mathscr{L}_i = ie(\partial_\mu\phi^+\cdot\phi - \phi^+\partial_\mu\phi)A^\mu + e^2A^2\phi^+\phi。 \quad (4\text{-}7)$$

对于旋量场$\psi$和电磁场$A_\mu$相互作用时，有

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\psi+i} + \mathscr{L}_A = \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_i,$$

$$\mathscr{L}_\psi = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi,$$

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu),$$

$$\mathscr{L}_i = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu。 \quad (4\text{-}8)$$

标量场$\phi$和旋量场$\psi$之间，没有直接的作用。它们之间的电磁

作用，通过电磁场来实现。当然，这样建立的电磁作用理论，(4-7)式、(4-8)式表示的拉格朗日密度，在时空平移、洛仑兹变换 $P$、$C$、$T$ 变换下，是不变的。

**运动方程** 把(4-7)式、(4-8)式代入拉格朗日方程

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} = 0,$$

就得到相互作用的标量场，电磁场方程

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - \mu^2\phi = 0,$$

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^+ - \mu^2\phi^+ = 0, \qquad (4\text{-}9)$$

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = ie(\phi^+\partial_\nu\phi - \partial_\nu\phi^+\phi) - 2e^2A_\nu\phi^+\phi$$

和相互作用的旋量场、电磁场方程

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\psi = 0, \qquad (4\text{-}10)$$

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = e\,\overline{\psi}\gamma_\nu\psi。$$

不管是(4-9)式，还是(4-10)式，都是联立的非线性方程，没有简单的平面波解，求解是困难的。

**库仑规范和量子化** 在狄拉克场 $\psi$ 和电磁场 $A_\mu$ 相互作用的理论中，场量 $\psi_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$ 有四个分量，$A_\mu(\mu=0,1,2,3)$ 也有四个分量。量子化时，要选出独立的正则坐标和正则动量。因此，必需考虑它们满足的规范条件。由相互作用场的拉格朗日密度(4-8)式

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \qquad (4\text{-}11)$$

看来，不包含 $\dot{A}_0$ 的项，$A_0$ 不可能是正则变量。在库仑规范

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0 \qquad (4\text{-}12)$$

的条件下，$\vec{A}$ 的三个分量也不是独立的，独立的只有两个分量。

把$\vec{A}$看作满足条件(4-12)式的正则坐标，则相应的正则动量为

$$\vec{\pi}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\vec{A}}}=\dot{\vec{A}}\ 。$$

当然，$\vec{\pi}$也要满足规范条件$\nabla\cdot\vec{\pi}=\nabla\cdot\dot{\vec{A}}=0$。把$\psi$看作正则坐标，相应的正则动量就是

$$\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\psi^{+}。$$

因此，在库仑规范下的正则变量，就是

$$\vec{A},\ \dot{\vec{A}},\psi,\ i\psi^{+},\tag{4-13}$$

它们要满足规范条件

$$\nabla\cdot\vec{A}=0,\quad \nabla\cdot\dot{\vec{A}}=0。\tag{4-14}$$

$A_0$不是正则变量，它应该可以用正则变量表示。由(4-10)式的第二式

$$\partial^{\mu}(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})=e\ \overline{\psi}\ \gamma_{\nu}\psi,$$

令$\nu=0$，则得

$$\partial^{i}(\partial_{i}A_{0}-\dot{A}_{i})=e\psi^{+}\psi,$$

$$\nabla^{2}A_{0}=-e\psi^{+}\psi。\tag{4-15}$$

这是$A_0$需要满足的泊松方程，其解为

$$A_{0}(\vec{x},t)=\frac{e}{4\pi}\int\frac{\psi^{+}(\vec{x}',t)\psi(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^{3}x',\tag{4-16}$$

就是静电学中的电势。

描述场的其他物理量，也应该可以用正则变量表示。例如，场的哈密顿量

$$H=\int\mathscr{H}\,d^{3}x,$$

$$\mathscr{H} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} + i\psi^+ \dot{\psi} - \mathscr{L} = \mathscr{H}_\psi + \mathscr{H}_A + \mathscr{H}_i,$$

$$\mathscr{H}_\psi = \psi^+ (-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi,$$

$$\mathscr{H}_A = \frac{1}{2}\dot{\vec{A}}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2, \tag{4-17}$$

$$\mathscr{H}_i = -e\overline{\psi}\gamma_\mu \psi A^\mu - \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2,$$

$$H_i = \int \overline{\psi}(x)\, \vec{\gamma}\, \psi(x) \cdot \vec{A}(x) d^3x$$

$$+ \frac{e^2}{8\pi}\int \frac{\psi^+(\vec{x}',t)\psi(\vec{x}',t)\psi^+(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x d^3x',$$

后一项是库仑相互作用能量。

量子化后，正则坐标 $\psi$、$\vec{A}$，正则动量 $i\psi^+$、$\dot{\vec{A}}$，就都是算符。按照正则量子化方法，如第三章所述，它们满足正则对易关系

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi^+_\beta(\vec{x}' t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{4-18}$$

$$[A_i(\vec{x},t), \dot{A}_j(\vec{x}',t)] = i\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

其他非共轭的算符，对易或反对易。而正则运动方程是

$$\dot{\psi} = i[H, \psi],$$

$$\dot{A}_i = i[H, A_i], \tag{4-19}$$

$$\ddot{A}_i = i[H, \dot{A}_i]。$$

把(4-17)式代入，就得到如(4-10)式所示的算符方程。

**洛仑兹规范和量子化** 在经典电动力学中，洛仑兹条件是

$$\partial^\mu A_\mu = 0。$$

电磁场的拉格朗日密度，如(3-88)式所示，可以写成

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu。$$

相互作用场的拉格朗日密度，就是

$$\mathscr{L}=\overline{\psi}i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}-ieA_{\mu})\psi-m\overline{\psi}\psi-\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}。\quad(4\text{-}20)$$

在(4-20)式中，有$\psi$和$A_{\mu}$的时间导数$\dot{\psi}$和$\dot{A}_{\mu}$。把洛仑兹条件暂时搁置不管，就可以把$\psi$和$A_{\mu}$都看作独立的正则坐标，相应的正则动量是

$$\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\psi^{+},\quad\pi^{\mu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_{\mu}}=-\dot{A}^{\mu},\quad(4\text{-}21)$$

而哈密顿量就是

$$H=\int\mathscr{H}d^{3}x,$$

$$\mathscr{H}=\pi\dot{\psi}+\pi^{\mu}\dot{A}_{\mu}-\mathscr{L}=\mathscr{H}_{\psi}+\mathscr{H}_{A}+\mathscr{H}_{i},$$

$$\mathscr{H}_{\psi}=\psi^{+}(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi,\quad(4\text{-}22)$$

$$\mathscr{H}_{A}=-\frac{1}{2}(\dot{A}_{\mu}\dot{A}^{\mu}+\nabla A_{\mu}\cdot\nabla A^{\mu}),$$

$$\mathscr{H}_{i}=-e\overline{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu}。$$

量子化后，它们就都是算符。按照正则量子化方法，它们满足正则对易关系

$$\{\psi_{\alpha}(\vec{x},t),\psi_{\beta}^{+}(\vec{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}'),\quad(4\text{-}23)$$

$$[A_{\mu}(\vec{x},t),\dot{A}_{\nu}(\vec{x}',t)]=-ig_{\mu\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}'),$$

其他非共轭的算符对易或反对易。正则运动方程就是

$$\dot{\psi}=i[H,\psi],$$

$$\dot{A}_{\mu}=i[H,A_{\mu}],$$

$$\ddot{A}_{\mu}=i[H,\dot{A}_{\mu}]。$$

把(4-22)式代入，就得到算符方程

$$i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}-ieA_{\mu})\psi-m\psi=0,$$

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = e \overline{\psi} \gamma_\nu \psi。 \tag{4-24}$$

在以上的论述中，我们撇开了洛仑兹条件，把 $A_\mu(\mu=0,1,2,3)$看作独立的。实际上，洛仑兹条件是必须考虑的。如第三章 § 6 论述的那样，我们把洛仑兹条件表述为

$$\langle\phi|\partial^\mu A_\mu|\phi\rangle=0, \tag{4-25}$$

$|\phi\rangle$表示物理上允许的状态。(4-25)式表示物理态应该满足的洛仑兹条件。

## § 2. 核子场和介子场的强作用

强作用的研究起始于核子之间的核力。构成原子核的基本元素是质子和中子，统称为核子。核子之间的作用，称为核力。它使核子结合成原子核。实验表明：核力是与电荷无关的。不管是带电的质子，还是不带电的中子，在核力方面的表现是完全一样的。汤川的核力理论认为：核子之间的作用是通过交换$\pi$介子来实现的。核力的电荷无关性意味着：不管是带电的 $\pi^+$介子或$\pi^-$介子，还是不带电的$\pi^0$介子，在传递核力方面是等价的。

**核子二重态**　质子和中子，在核力方面有同样的表现，故可看成是同一粒子(核子)的两种不同状态(质子态和中子态)。人们熟知，电子有两种自旋状态，一种是自旋向上，一种是自旋向下。仿此，人们把核子的两种状态，用同位旋来表示。认为：核子是同位旋为$\frac{1}{2}$的粒子；同位旋第三分量为$+\frac{1}{2}$的状态是质子态；同位旋第三分量为$-\frac{1}{2}$的状态是中子态。质子、中子的同位旋波函数，和电子的自旋波函数一样，分别是

$$\chi_p=\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad \chi_n=\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}。 \tag{4-26}$$

它们的同位旋算符，也和电子的自旋算符一样，是

$$\tau_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\quad \tau_2=\begin{vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{vmatrix},\quad \tau_3=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}。\tag{4-27}$$

同位旋和自旋不同，自旋波函数和自旋算符是属于自旋空间的，同位旋波函数和同位旋算符是属于同位旋空间的。由

$$\left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\tau_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\tau_3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

表明：核子的同位旋为 $\frac{1}{2}$。而

$$\frac{\tau_3}{2}\chi_p=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix},$$

$$\frac{\tau_3}{2}\chi_n=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}$$

表明：质子的同位旋向上，中子的同位旋向下。用 $p(x)$ 表示质子的旋量波函数，$n(x)$ 表示中子的旋量波函数，则核子的波函数可以写成

$$N(x)=\begin{vmatrix}p(x)\\ n(x)\end{vmatrix}。\tag{4-28}$$

在同位旋空间的转动下，核子的变换为

$$N\to N'=uN,\ u=e^{-i\frac{1}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}}。\tag{4-29}$$

转动是无穷小时，$\vec{\theta}$ 无穷小，核子的变换为

$$N\to N'=\left(1-i\,\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right)N\tag{4-30}$$

$$\delta N=-i\,\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}N。$$

**介子三重态** 三个 $\pi$ 介子，在传递核力方面有同样的表现，

故可看作同一粒子的三种不同状态。设 $\pi^-$ 介子的波函数为 $\phi^+$、$\pi^+$ 介子的波函数为 $\phi$、$\pi^0$ 介子的波函数为 $\phi^0$。我们用三个实标量 $\phi_1$、$\phi_2$、$\phi_3$ 代替 $\phi$、$\phi^+$、$\phi^0$，且令

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + \phi^+), \quad \phi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\phi - \phi^+), \quad \phi_3 = \phi_0, \tag{4-31}$$

则其逆变换为

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2), \quad \phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^0 = \phi_3。 \tag{4-32}$$

把 $\vec{\phi}$ 看作同位旋空间的矢量，$\phi_1$，$\phi_2$、$\phi_3$ 是它的三个分量。由(4-32)式可知，$\pi^-$、$\pi^+$、$\pi^0$ 介子的同位旋波函数可以写成

$$\chi_+ = \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \chi_- = \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \chi_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \tag{4-33}$$

相应的同位旋算符为

$$T_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad T_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}。 \tag{4-34}$$

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = 1(1+1) \tag{4-35}$$

表明：介子的同位旋是1。而

$$T_3\chi_+ = \chi_+, \quad T_3\chi_- = -x_-, \quad T_3 x_0 = 0 \tag{4-36}$$

表明：$\pi^+$ 介子的同位旋第三分量为 +1，$\pi^-$ 介子的同位旋第三分量为 −1，$\pi^0$ 介子的同位旋第三分量为 0。

在同位旋空间的转动下，同位旋矢量介子的变换为

$$\phi_i \to \phi_i' = (e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{T}})_{ij} \cdot \phi_j。 \tag{4-37}$$

无穷小变换时，$\vec{\theta}$ 无穷小，

$$\phi_i \to \phi_i' = \phi_i - i\theta^k T^k_{ij} \cdot \phi_j,$$

用(4-34)式表示的 $T^k_{ij}=-i\varepsilon_{ijk}$，上式可以写成

$$\phi_i\to\phi'_i=\phi_i-\varepsilon_{ijk}\phi_j\theta_k,$$

$$\vec{\phi}\to\vec{\phi}'=\vec{\phi}+\vec{\theta}\times\vec{\phi}, \tag{4-38}$$

$$\delta\vec{\phi}=\vec{\theta}\times\vec{\phi}\ 。$$

在同位旋空间转动下，同位旋矢量介子的变换，还可以写成

$$\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\to\vec{\phi}'\cdot\vec{\tau}=u\ \vec{\phi}\cdot\vec{\tau}u^{-1},\ u=e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}。 \tag{4-39}$$

无穷小变换时，$\vec{\theta}$ 无穷小，

$$\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\to\vec{\phi}'\cdot\vec{\tau}=\left(1-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\left(1+i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right)$$

$$=\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}-i\theta_i\phi_j\left[\frac{\tau_i}{2},\ \tau_j\right]$$

$$=\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}-i\theta_i\phi_j i\varepsilon_{ijk}\tau_k$$

$$=(\vec{\phi}+\vec{\theta}\times\vec{\phi})\cdot\vec{\tau},$$

$$\vec{\phi}\to\vec{\phi}'=\vec{\phi}+\vec{\theta}\times\vec{\phi},$$

和(4-38)式一致。这也表明(4-39)式和(4-37)式是一致的。

**拉格朗日密度** 核子是费米场，其拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}_N=\overline{N}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)N, \tag{4-40}$$

$m$ 是核子的质量，忽略了质子质量和中子质量的差别。介子是标量粒子，其拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}_\phi=\frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi}-\frac{1}{2}\mu^2\vec{\phi}\cdot\vec{\phi}。 \tag{4-41}$$

显然，(4-40)式，(4-41)式在(4-29)式、(4-38)式的变换下是不变的。实际上

$$\overline{N}N \to \overline{N}'N' = \overline{N}u^{-1}uN = \overline{N}N,$$

$$\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \to \vec{\phi}' \cdot \vec{\phi}' = (\vec{\phi} + \vec{\theta} \times \vec{\phi}) \cdot (\vec{\phi} + \vec{\theta} \times \vec{\phi}) = \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}。$$

(4-40)式、(4-41)式都是自由场的拉格朗日密度，它们相互作用的拉格朗日密度，应该有同样的对称性，应该是同位旋转动下不变的。满足对称要求的有

$$\mathscr{L}_{\mathrm{i}} = -ig\overline{N}\gamma_5 \vec{\tau} N \cdot \vec{\phi}, \tag{4-42}$$

它是时空平移不变、洛仑兹不变、空间反射不变的。而且是同位旋转动不变的。

$$\overline{N}\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} N \to \overline{N}'\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}' N' = \overline{N}u^{-1} \cdot u\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} u^{-1} \cdot uN = \overline{N}\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} N。$$

核子，介子相互作用的总拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_\phi + \mathscr{L}_{\mathrm{i}},$$

$$\mathscr{L}_N = \overline{N}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N, \tag{4-43}$$

$$\mathscr{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{1}{2}\mu^2 \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}, \tag{4-43}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{i}} = -ig\overline{N}\gamma_5 \vec{\tau} N \cdot \vec{\phi}。$$

**运动方程**　把(4-43)式代入拉格朗日方程

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\alpha} = 0,$$

就得到相互作用的核子、介子的场方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N = ig\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi} N, \tag{4-44}$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \mu^2)\vec{\phi} = -ig\overline{N}\gamma_5 \vec{\tau} N。$$

它们是联立的非线性方程，没有简单的平面波解，难以求解。

**同位旋守恒**　(4-43)式表示的拉格朗日密度，在时空平移、洛仑兹变换、空间反射下，都是不变的。在同位旋转动下，也是不变的。按照诺依率尔定理，同位旋守恒，其守恒流和守恒量由

公式

$$j^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \delta\phi_a, \quad Q = \int j^0 d^3x \tag{4-45}$$

导出。实际上，由(4-43)式得

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu N} = i\overline{N}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \vec{\phi}} = \partial^\mu \vec{\phi}, \tag{4-46}$$

同位旋空间转动时，核子、介子场量的变化，如(4-30)式、(4-38)式所示，为

$$\delta N = -i\,\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} N, \tag{4-47}$$

$$\delta\vec{\phi} = \vec{\theta} \times \vec{\phi}。$$

把(4-46)式，(4-47)式代入(4-45)式，得到守恒的同位旋流和同位旋荷

$$\vec{j}_\mu = \overline{N}\gamma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} N + \vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}, \tag{4-48}$$

$$\vec{I} = \int \left( N^+ \frac{\vec{\tau}}{2} N + \vec{\phi} \times \dot{\vec{\phi}} \right) d^3x。$$

**重子数守恒** 核子是重子，在重子规范变换下

$$N \to N' = e^{-i\alpha} N = (1 - i\alpha)N,$$

$$\delta N = -i\alpha N。 \tag{4-49}$$

介子不是重子，在重子规范变换下是不变的

$$\vec{\phi} \to \vec{\phi}' = \vec{\phi},$$

$$\delta\vec{\phi} = 0。 \tag{4-50}$$

显然，在(4-49)式、(4-50)式表示的重子规范变换下，(4-43)式表示的拉格朗日密度是不变的。重子数守恒。把(4-49)式、(4-50)式、(4-46)式代入(4-45)式，就得守恒的重子流和重子荷

$$j^B_\mu = \overline{N}\gamma_\mu N = \overline{p}\gamma_\mu p + \overline{n}\gamma_\mu n,$$

$$B=\int N^{+}Nd^{3}x=\int(p^{+}p+n^{+}n)d^{3}x。\qquad(4\text{-}51)$$

**电荷守恒** 质子带正电，中子不带电，在电荷规范变换下

$$p\to p'=e^{-i\theta}p\simeq(1-i\theta)p,$$
$$\delta p=-i\theta p,$$
$$n\to n'=n,$$
$$\delta n=0。$$

用二重态波函数表示，上列变化可以写成

$$N\to N'=e^{-i\theta\frac{1+\tau_3}{2}}N\simeq(1-i\theta)\frac{1+\tau_3}{2}N,$$

$$\delta N=-i\theta\frac{1+\tau_3}{2}N。\qquad(4\text{-}52)$$

$\pi^{+}$ 介子中的电荷为 $+1$，$\pi^{-}$ 介子 $\phi^{+}$ 的电荷为 $-1$，$\pi^{0}$ 介子 $\phi^{0}$ 是电中性的。在电荷规范变换下，它们的变换为

$$\phi^{+}\to\phi^{+\prime}=e^{+i\theta}\phi^{+}\simeq(1+i\theta)\phi^{+},$$
$$\delta\phi^{+}=+i\theta\phi^{+},$$
$$\phi\to\phi'=e^{-i\theta}\phi\simeq(1-i\theta)\phi,$$
$$\delta\phi=-i\theta\phi,$$
$$\phi^{0}\to\phi^{0\prime}=\phi^{0},$$
$$\delta\phi^{0}=0。$$

相应地，同位旋矢量

$$\phi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi+\phi^{+}),\phi_2\frac{i}{\sqrt{2}}(\phi-\phi^{+}),\phi_3=\phi_0$$

的变换为

$$\delta\phi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\phi+\delta\phi^{+})=-\theta\frac{i}{\sqrt{2}}(\phi-\phi^{+})=-\theta\phi_2,$$

$$\delta\phi_2=\frac{i}{\sqrt{2}}(\delta\phi-\delta\phi^{+})=+\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi+\phi^{+})=+\theta\phi_1,$$

$$\delta\phi_3=\delta\phi_0=0。$$

用$\vec{k}$表示沿同位旋第三轴的单位矢量，则上式可以写成

$$\delta\vec{\phi} = -\theta\vec{\phi}\times\vec{k}。\tag{4-53}$$

在用(4-52)式，(4-53)式表示的电荷规范变换下，拉格朗日密度(4-43)式是不变的。实际上

$$\delta(\overline{N}N) = \delta\overline{N}\cdot N + \overline{N}\delta N = i\theta\,\overline{N}\frac{1+\tau_3}{2}N - i\theta\,\overline{N}\frac{1+\tau_3}{2}N = 0,$$

$$\delta(\vec{\phi}\cdot\vec{\phi}) = 2\,\vec{\phi}\cdot\delta\vec{\phi} = -2\theta\vec{\phi}\cdot(\vec{\phi}\times\vec{k}) = 0,$$

$$\delta(\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi}) = 2\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\delta\vec{\phi} = -2\theta\partial_\mu\vec{\phi}\cdot(\partial^\mu\vec{\varphi}\times\vec{k}) = 0,$$

$$\begin{aligned}\delta(\overline{N}\vec{\tau}N\cdot\vec{\phi}) &= \delta\overline{N}\vec{\tau}N\cdot\vec{\phi} + \overline{N}\vec{\tau}\delta N\cdot\vec{\phi} + \overline{N}\vec{\tau}N\cdot\delta\vec{\phi}\\ &= i\theta\overline{N}\frac{1+\tau_3}{2}\vec{\tau}N\cdot\vec{\phi} - i\theta\overline{N}\vec{\tau}\frac{1+\tau_3}{2}N\cdot\vec{\phi}\\ &\quad -\overline{N}\vec{\tau}N\cdot\theta\vec{\phi}\times\vec{k}\\ &= \frac{i}{2}\theta\overline{N}[\tau_3,\tau_i]N\phi_i - \theta\overline{N}\vec{k}\times\vec{\tau}N\cdot\vec{\phi}\\ &= -\theta\overline{N}\varepsilon_{3ij}\tau_j\phi_i N - \theta\overline{N}\varepsilon_{3ij}\tau_i N\phi_j = 0。\end{aligned}$$

按照诺依率尔定理，电荷守恒。把(4-52)式、(4-53)式、(4-46)式代入(4-45)式，就得到守恒的电流和电荷

$$j_\mu^e = \overline{N}\gamma_\mu\frac{1+\tau_3}{2}N + \vec{\varphi}\times\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\vec{k},\tag{4-54}$$

$$Q = \int\left(N^+\frac{1+\tau_3}{2}N + \vec{\phi}\times\dot{\vec{\phi}}\cdot\vec{k}\right)d^3x。$$

**盖尔曼-西岛关系** 比较(4-45)式、(4-51)式、(4-54)式，就可以看出，守恒的电荷$Q$、重子荷$B$、同位旋第三分量$I_3$之间，存在着紧密关系

$$Q = I_3 + \frac{B}{2},\tag{4-55}$$

这关系叫做盖尔曼-西岛（Gell-Mann—Nishijiman）关系。如果涉及奇异粒子，上式就被推广为

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \qquad (4\text{-}56)$$
$$Y = B + S$$

$S$叫做奇异荷，$Y$叫做超荷。在粒子物理中，它是一个重要的关系。

**量子化** 把(4-43)式表示的核子、介子相互作用理论量子化，是简便的。(4-43)式中有 $N$ 和 $\vec{\phi}$ 的时间导数，可以看作正则坐标，相应的正则动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{N}} = iN^+, \quad \vec{\pi} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vec{\phi}}} = \dot{\vec{\phi}}, \qquad (4\text{-}57)$$

场的哈密顿量为

$$H = \int \mathscr{H} d^3x,$$
$$\mathscr{H} = iN^+\dot{N} + \dot{\vec{\phi}}\cdot\dot{\vec{\phi}} - \mathscr{L} = \mathscr{H}_N + \mathscr{H}_\phi + \mathscr{H}_1,$$
$$\mathscr{H}_N = N^+(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)N, \qquad (4\text{-}58)$$
$$\mathscr{H}_\phi = \frac{1}{2}(\dot{\vec{\phi}}\cdot\dot{\vec{\phi}} + \nabla\vec{\phi}\cdot\nabla\vec{\phi} + \mu^2\vec{\phi}\cdot\vec{\phi}),$$
$$\mathscr{H}_1 = ig\overline{N}\gamma_5\vec{\tau}N\cdot\vec{\phi}。$$

量子化以后，$N$、$iN^+$、$\vec{\phi}$、$\dot{\vec{\phi}}$就都是算符，满足正则对易关系

$$\{N_\alpha(\vec{x},t),\ N^+_\beta(\vec{x}\,',t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,'),$$
$$[\phi_i(\vec{x},t),\ \dot{\phi}_j(\vec{x}\,',t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,'), \qquad (4\text{-}59)$$

其他非共轭的算符，对易或者反对易。正则运动方程是

$$\dot{N} = i[H, N],$$
$$\dot{\vec{\phi}} = i[H, \vec{\phi}], \qquad (4\text{-}60)$$

$$\dot{\vec{\phi}} = i[H, \vec{\phi}]。$$

把(4-58)式表示的 $H$ 代入(4-60)式，就得到如(4-44)式所示的算符方程

$$(i\gamma^\mu\partial - m)N = ig\gamma_5 \vec{\tau}\cdot\vec{\phi}N,$$

$$(\partial^\mu\partial_\mu + \mu^2)\vec{\phi} = -ig\overline{N}\gamma_5\vec{\tau}N。$$

这是一个难以求解的、非线性的联立方程。

## §3. 量子色动力学

人们认为，强作用的最有希望的理论，是量子色动力学。具有强作用的基本粒子是夸克。重子和介子都是由夸克组成的。重子、介子间的强作用是由夸克间的强作用形成的。有六种夸克，或者说夸克有六种味道。它们叫做 $u$ 夸克、$d$ 夸克、$c$ 夸克、$s$ 夸克、$b$ 夸克、$t$ 夸克。夸克有三种颜色，如红色、黄色，蓝色。夸克间的强作用是由颜色引起的，是通过胶子来实现的。

**自由夸克** 目前认为，夸克一定存在。但至今实验上尚未发现。且认为它被禁闭着，永远不能单个地存在。但禁闭在强子内的夸克是渐近自由的。夸克是费米子，自旋为$\frac{1}{2}$，场量$q(x)$有四个自旋分量 $q_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$。夸克有六种味道，场量 $q(x)$有六个味道分量 $q_{\alpha f}$ $(f=u、d、s、c、b、t)$。夸克有三种颜色，场量$q(x)$有三个颜色分量 $q_{\alpha fc}$($c$=红、黄、蓝)。所以场量 $q(x)$是旋量空间的四行一列矩阵味道空间的六行一列矩阵和颜色空间的三行一列矩阵。自由夸克的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_q = \overline{q}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q(x), \qquad (4\text{-}61)$$

这里认为，不同味道的夸克，不同颜色的夸克，质量都是相同的。

**整体规范变换**　量子色动力学认为，在颜色空间的转动下，夸克场量 $q(x)$，作为颜色空间的三行一列矩阵，其变化为

$$q(x)\to q'(x)=uq(x), \tag{4-62}$$

$$u=e^{-i\alpha^a\frac{\lambda^a}{2}},\ a=1,2,\cdots,8,$$

$\alpha^a$ 是任意的参数，$\lambda^a$ 是 $3\times3$ 矩阵

$$\lambda_1=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix},\quad \lambda_2=\begin{vmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{vmatrix},$$

$$\lambda_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{vmatrix},\quad \lambda_4=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{vmatrix},$$

$$\lambda_5=\begin{vmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{vmatrix},\quad \lambda_6=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix},$$

$$\lambda_7=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{vmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{vmatrix},$$

$$\mathrm{Tr}\lambda^a=0,\quad \mathrm{Tr}(\lambda^a\lambda^b)=2\delta^{ab}。\tag{4-63}$$

这些矩阵，叫做盖尔曼矩阵，是泡里矩阵的推广和扩充。

当参数 $\alpha^a(a=1,2,\cdots,8)$ 与时空坐标无关时，时空各点的场量，变化是相同的。故称整体规范变换。这时

$$q\to q'=uq,\quad \partial_\mu q\to\partial_\mu q'=u\partial_\mu q,$$

$$\overline{q}\to\overline{q}'=\overline{q}u^{-1},$$

$$\overline{q}q\to\overline{q}'q'=\overline{q}u^{-1}uq=\overline{q}q,$$

$$\overline{q}\partial_\mu q\to\overline{q}'\partial_\mu q'=\overline{q}\partial_\mu q,$$

$$\mathscr{L}_q \to \mathscr{L}_{q'} = \mathscr{L}_q。$$

拉格朗日密度(4-61)式是不变的。按照诺依率尔定理,有颜色守恒定律。由于

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu q} = i\bar{q}\gamma^\mu, \quad \delta q = -i\alpha^a \frac{\lambda^a}{2} q,$$

守恒的颜色流和颜色荷为

$$j_\mu^a = \bar{q}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q, \quad Q^a = \int q^+ \frac{\lambda^a}{2} q d^3x。 \qquad (4\text{-}64)$$

**定域规范变换** 当参数 $\alpha^a$ 与时空坐标有关时,$\alpha^a = \alpha^a(x)$,时空各点的场量 $q(x)$ 的变化是不同的。这时

$$q \to q' = uq,$$

$$\partial_\mu q \to \partial_\mu q' = \partial_\mu (uq) = u\partial_\mu q + \partial_\mu u \cdot q \neq u\partial_\mu q,$$

$$\bar{q}\partial_\mu q \to \bar{q}'\partial_\mu q' \neq \bar{q}\partial_\mu q,$$

$$\mathscr{L}_q \to \mathscr{L}_{q'} \neq \mathscr{L}_q。$$

拉格朗日密度(4-61)式,在定域规范变换下,不是不变的。

**胶子场势** 人们认为:自然界是如此地和谐,以致描述它的拉格朗日密度,应该是不变的;定域规范变换的发生,是由于存在附加场,使时空空间发生了畸变。(4-61)式不是不变的,是由于没有考虑到存在的附加场。如果考虑到附加场,修改(4-61)式,就可以得到在定域规范变换下不变的拉格朗日密度。因此,我们引入附加的规范场

$$A_\mu(x) = ig\frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x)。 \qquad (4\text{-}65)$$

把场量 $q(x)$ 的时空导数,换成协变导数

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - A_\mu, \qquad (4\text{-}66)$$

要求在定域规范变换下

$$D_\mu q \to D'_\mu q' = uD_\mu q \qquad (4\text{-}67)$$

修改(4-61)式为

$$\mathscr{L}_{q+i} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q, \qquad (4\text{-}68)$$

就得到了定域规范不变的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}_{\bar{q}+I}\to\mathscr{L}'_{\bar{q}+I}=\overline{q}'(i\gamma^{\mu}D'_{\mu}-m)q'=\mathscr{L}_{\bar{q}+I}。$$

(4-67)式表示的要求，确定了规范势 $A_{\mu}$ 的变换规律。由(4-66)式、(4-67)式，得

$$(\partial_{\mu}-A'_{\mu})uq=u(\partial_{\mu}-A_{\mu})q,$$

$$(\partial_{\mu}u+u\partial_{\mu}-A'_{\mu}u)q=u(\partial_{\mu}-A_{\mu})q,$$

$$-\partial_{\mu}u+A'_{\mu}u=uA_{\mu},$$

$$A'_{\mu}=uA_{\mu}u^{-1}+\partial_{\mu}u\cdot u^{-1},$$

$$A'_{\mu}=uA_{\mu}u^{-1}-u\partial_{\mu}u^{-1}。\tag{4-69}$$

如(4-65)式所示，对于一个盖尔曼矩阵 $\lambda^{a}$，就引进一个规范场 $A^{a}_{\mu}$，八个盖尔曼矩阵($a=1,2,\cdots,8$)，就有八个规范场。它们的线性组合构成 $A_{\mu}$。它们的变换规律，也由 $A_{\mu}$的变换规律(4-69)式导出。在无穷小变换下

$$u=e^{-i\alpha^{a}\frac{\lambda^{a}}{2}}\simeq1-i\alpha^{a}\frac{\lambda^{a}}{2},$$

$$ig\frac{\lambda^{b}}{2}A^{b\prime}_{\mu}=\left(1-i\alpha^{a}\frac{\lambda^{a}}{2}\right)ig\frac{\lambda^{c}}{2}A^{c}_{\mu}\left(1+i\alpha^{a}\frac{\lambda^{a}}{2}\right)$$

$$-\left(1-i\alpha^{a}\frac{\lambda^{2}}{2}\right)\partial_{\mu}\left(1+i\alpha^{a}\frac{\lambda^{a}}{2}\right),$$

$$ig\frac{\lambda^{a}}{2}A^{a\prime}_{\mu}=ig\frac{\lambda^{a}}{2}A^{a}_{\mu}-i\alpha^{b}igA^{c}_{\mu}\left[\frac{\lambda^{b}}{2},\frac{\lambda^{c}}{2}\right]-i\partial_{\mu}\alpha^{a}\frac{\lambda^{a}}{2},$$

$$ig\frac{\lambda^{a}}{2}A^{a\prime}_{\mu}=ig\frac{\lambda^{a}}{2}A^{a}_{\mu}+g\alpha^{b}A^{c}_{\mu}if^{abc}\frac{\lambda^{a}}{2}-i\partial_{\mu}\alpha^{a}\frac{\lambda^{a}}{2},$$

$$A^{a\prime}_{\mu}=A^{a}_{\mu}+f^{abc}\alpha^{b}A^{c}_{\mu}-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\alpha^{a}。\tag{4-70}$$

**胶子场强** (4-68)式中，包括了自由夸克的拉格朗日密度和夸克与胶子相互作用的拉格朗日密度。要构成总的拉格朗日密度，还需要自由胶子的拉格朗日密度。为此，我们仿照电磁场强度，由胶子场势 $A_{\mu}$，定义胶子场强

$$F_{\mu\nu}=D_\mu A_\nu-D_\nu A_\mu,$$

$$F_{\mu\nu}=(\partial_\mu-A_\mu)A_\nu-(\partial_\nu-A_\nu)A_\mu, \tag{4-71}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-[A_\mu,A_\nu],$$

$A$ 是 $A_\mu^a$ 的线性组合。同理 $F_{\mu\nu}$ 是 $F_{\mu\nu}^a$ 的线性组合

$$F_{\mu\nu}=ig\frac{\lambda^a}{2}F_{\mu\nu}^a。\tag{4-72}$$

由(4-71)式可以得到八个胶子场强与八个胶子场势的关系

$$ig\frac{\lambda^a}{2}F_{\mu\nu}^a=ig\frac{\lambda^a}{2}(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a)+g^2A_\mu^bA_\nu^c\left[\frac{\lambda^b}{2},\frac{\lambda^c}{2}\right],$$

$$\left[\frac{\lambda^b}{2},\frac{\lambda^c}{2}\right]=if^{abc}\frac{\lambda^a}{2},$$

$$F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+gf^{abc}A_\mu^bA_\nu^c。\tag{4-73}$$

在规范变换下，场强的变换规律，可以由(4-69)式导出。实际上

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\to F'_{\mu\nu}&=\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu-[A'_\mu,A'_\nu]\\
&=\partial_\mu(uA_\nu u^{-1}-u\partial_\nu u^{-1})-\partial_\nu(uA_\mu u^{-1}-u\partial_\mu u^{-1})\\
&\quad-[uA_\mu u^{-1}-u\partial_\mu u^{-1},uA_\nu u^{-1}-u\partial_\nu u^{-1}]\\
&=\partial_\mu u\cdot A_\nu u^{-1}-u\partial_\mu A_\nu u^{-1}+uA_\nu\partial_\mu u^{-1}-\partial_\mu u\partial_\nu u^{-1}\\
&\quad-\partial_\nu uA_\mu u^{-1}-u\partial_\nu A_\mu u^{-1}-uA_\mu\partial_\nu u^{-1}+\partial_\nu u\partial_\mu u^{-1}\\
&\quad+uA_\mu A_\nu u^{-1}-u\partial_\mu u^{-1}uA_\nu u^{-1}-uA_\mu\partial_\nu u^{-1}+u\partial_\mu u^{-1}u\partial_\nu u^{-1}\\
&\quad-uA_\nu A_\mu u^{-1}+u\partial_\nu u^{-1}uA_\mu u^{-1}+uA_\nu\partial_\mu u^{-1}-u\partial_\nu u^{-1}u\partial_\mu u^{-1},\end{aligned}$$

$$\partial_\mu u=\partial_\mu u\cdot u^{-1}u=-u\partial_\mu u^{-1}u,$$

$$F'_{\mu\nu}=u(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+A_\mu A_\nu-A_\nu A_\mu)u^{-1},$$

$$F'_{\mu\nu}=uF_{\mu\nu}u^{-1}。\tag{4-74}$$

在无穷小变换下，

$$ig\frac{\lambda^a}{2}F_{\mu\nu}^{a\prime}=\left(1-i\alpha^b\frac{\lambda^b}{2}\right)ig\frac{\lambda^c}{2}F_{\mu\nu}^c\left(1+i\alpha^b\frac{\lambda^b}{2}\right)$$

$$=ig\frac{\lambda^a}{2}F_{\mu\nu}^a-i\alpha^b igF_{\mu\nu}^c\left[\frac{\lambda^b}{2},\frac{\lambda^c}{2}\right],$$

$$F_{\mu\nu}^{a\prime}=F_{\mu\nu}^{a}+f^{abc}\alpha^{b}F_{\mu\nu}^{c}。\qquad(4\text{-}75)$$

**拉格朗日密度** (4-74)式表明 $F_{\mu\nu}$ 不是不变的，$\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 是不变的，

$$\mathrm{Tr}(F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu\prime})=\mathrm{Tr}(uF_{\mu\nu}u^{-1}uF^{\mu\nu}u^{-1})=\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

可用来构成不变的拉格朗日密度。由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}&=\mathrm{Tr}\left(ig\frac{\lambda^a}{2}F_{\mu\nu}^{a}ig\frac{\lambda^b}{2}F^{b\mu\nu}\right)\\&=-g^2F_{\mu\nu}^{a}F^{b\mu\nu}\mathrm{Tr}\left(\frac{\lambda^a\lambda^b}{2\ 2}\right)\\&=-\frac{1}{2}g^2F_{\mu\nu}^{a}F^{a\mu\nu},\end{aligned}$$

故可仿照电磁场情况，取

$$\mathscr{L}_A=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F^{a\mu\nu}。$$

总的拉格朗日密度，就是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\mathscr{L}_q+\mathscr{L}_A+\mathscr{L}_i,\\\mathscr{L}_q&=\bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)q,\\\mathscr{L}_A&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F^{a\mu\nu},\qquad(4\text{-}76)\\\mathscr{L}_i&=+g\bar{q}\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}qA_\mu^a。\end{aligned}$$

这就是量子色动力学的基础。

## §4．四费米子弱作用

1934 年，研究原子核的 $\beta$ 衰变时，费米 (Fermi) 提出四费米子直接相互作用的理论，即弱作用的相互作用拉格朗日密度，有

$$\mathscr{L}_i\sim\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2\bar{\psi}_3\Gamma'\psi_4\qquad(4\text{-}77)$$

的形式，$\Gamma$、$\Gamma'$ 是 4×4 矩阵。

如(2-106)式所示，线性独立的双旋量，有五种十六个：

$$\overline{\psi}\psi',\ \overline{\psi}\gamma_\mu\psi',\ \overline{\psi}\sum_{\mu\nu}\psi',\ \overline{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi',\ \overline{\psi}\gamma_5\psi'。$$

它们可以写成

$$\overline{\psi}o_i\psi',\ o_i=I,\ \gamma_\mu,\ \sum_{\mu\nu},\ \gamma_5\gamma_\mu,\ \gamma_5。$$

在1956年以前，认为弱作用中的宇称，也是守恒的。如(4-77)式所示的弱作用理论，应该是时空平移不变、洛仑兹不变、P、C、T分别守恒的。拉格朗日密度有

$$\mathscr{L}_i=\sum_i G_i\overline{\psi}_1 o_i\psi_2\overline{\psi}_3 o_i\psi_4+\text{h.c} \tag{4-78}$$

的形式。$G_i$是五种双旋量的耦合常数。

**V-A形式**：1956年，李政道、杨振宁提出：在弱作用中宇称不守恒。尔后，吴健雄用实验证实了这一断言。为弱作用理论的发展铺平了道路。1957年，苏达湘(Sudarshan)、马夏克(Marshak)等，提出了弱作用的$V-A$理论。即

$$\mathscr{L}_i=-\frac{G}{\sqrt{2}}J_\mu^+J^\mu, \tag{4-79}$$

$$J_\mu=\overline{\psi}\gamma_\mu(1+a\gamma_5)\psi'$$

是流-流相互作用的形式。而相互作用流$J_\mu$，是矢量流$V-\overline{\psi}\gamma_\mu\psi'$和轴矢量流$A-\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$的线性组合。显然，$\mathscr{L}_i$中有

$$\overline{\psi}\gamma_\mu\psi'\cdot\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi'$$

的项，是宇称不守恒的。

相互作用的$V-A$流$J_\mu$中，有轻子流，如

$$l_\mu=\overline{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)l, \tag{4-80}$$

$l(x)$是轻子场量，$\nu(x)$是相应的中微子场量。$J_\mu$中有奇异数守恒的强子流，如

$$h_\mu^0=\overline{p}\gamma_\mu(g_V+g_A\gamma_5)n, \tag{4-81}$$

$n(x)$是中子场量，$p(x)$是质子场量，$g_V$、$g_A$是接近于1的常

数。$J_\mu$ 中还有奇异数不守恒的强子流，如

$$h_\mu^1 = \overline{p}\gamma_\mu(g'_V + g'_A\gamma_5)\Lambda, \tag{4-82}$$

$\Lambda(x)$是 $\Lambda$ 超子的场量。$g'_V$、$g'_A$也是常数。实验指出：

$$g'_V/g'_A \simeq g_V/g_A \simeq 1.18, \tag{4-83}$$

$$g_V/g'_V \sim 10。$$

总的 $V$-$A$ 流可以写成

$$J_\mu = l_\mu + h_\mu^0 + h_\mu^1。 \tag{4-84}$$

**卡比玻角** 如(4-81)式、(4-82)式、(4-84)式所示，$V$-$A$流 $J_\mu$ 中，有四个待定常数。卡比玻(Cahhiho)分析实验结果，1963 年指出：

$$g_V^2 + g_{V'}^2 \simeq 1,$$

并令

$$g_V = \cos\theta_C \quad g'_V = \sin\theta_C,$$

用卡比玻角 $\theta_c$ 代替常数$g_V$ $g'_V$，使(4-81)式、(4-82)式可以写成

$$h_\mu = \overline{p}\gamma_\mu(1 + a\gamma_5)n\cos\theta_C, \tag{4-85}$$

$$h_\mu^1 = \overline{p}\gamma_\mu(1 + a'\gamma_5)\Lambda\sin\theta_C。$$

**夸克流** 1964 年，盖尔曼提出夸克结构模型。认为强子是由夸克组成的。质子的组成是 $p(u、u、d)$，中子的组成是 $n(u、d、d)$，$\Lambda$超子的组成是 $\Lambda(u、d、s)$。$u$、$d$、$s$ 是 $u$ 夸克、$d$ 夸克、$s$ 夸克。因而，强子流(4-85)式可以代之以夸克流

$$q_\mu = \overline{u}\gamma_\mu(1 + \gamma_5)(d\cos\theta_c + S\sin\theta_c)。 \tag{4-86}$$

所以，弱作用理论，可以写成

$$\mathscr{L}_I = -\frac{G}{\sqrt{2}}J_\mu^+ J^\mu,$$

$$J_\mu = l_\mu + q_\mu,$$

$$l_\mu = \overline{\nu}\gamma_\mu(1 + \gamma_5)l,$$

$$q_\mu = \overline{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d_\theta, \tag{4-87}$$
$$d_\theta = d\cos\theta_c + S\sin\theta_c。$$

**弱过程** 有一些典型的弱衰变过程，如$\mu$衰变

$$\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu,$$

用上述理论中的

$$\mathscr{L}_I = \frac{G}{\sqrt{2}}\overline{\nu}_\mu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\mu\cdot\overline{e}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu_e$$

进行计算。将所得的结果（$\mu$介子的寿命）和实验值比较，可以定出弱作用常数

$$G \approx 1.01\times10^{-5}/m_p^2,$$

$m_p$是质子的质量。

对于$\beta$衰变

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e,$$

可以用上述理论中的

$$\mathscr{L}_I = \frac{G}{\sqrt{2}}\cos\theta_c\overline{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d\,\overline{e}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu_e$$

计算。而$\Lambda$超子衰变

$$\Lambda \to p + e^- + \overline{\nu}_e,$$

可以用上述理论中的

$$\mathscr{L}_I = \frac{G}{\sqrt{2}}\sin\theta_c\overline{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)s\,\overline{e}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu_e$$

计算。可以用它们的结果确定卡比玻角

$$\theta_c \simeq 14°。$$

**左手同位旋形式** 如(4-87)式所示，在弱作用过程中，粒子是以$V-A$流的形式出现的

$$l_\mu = \overline{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)l, \quad q_\mu = \overline{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d_\theta \tag{4-88}$$

我们进一步考查粒子在弱作用中的面貌。

把费米场$\psi$分成左手场$\psi_L$和右手场$\psi_R$，

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \tag{4-89}$$

$$\psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi。$$

由定义

$$\gamma^5 = \gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

可知

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1+\gamma_5}{2}, \quad \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1-\gamma_5}{2}。$$

由此，$V-A$ 流可以写成

$$J_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi' = 2\overline{\psi}\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)^2\psi'$$

$$= 2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)^+\gamma_0\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi',$$

$$J_\mu = 2\overline{\psi}_L\gamma_\mu\psi'_L,$$

即左手矢量流的形式。(4-89)式就可写成

$$l_\mu = 2\overline{\nu}_L\gamma_\mu l_L, \quad q_\mu = 2\overline{\mu}_L\gamma_\mu d_{L\theta}。 \tag{4-90}$$

如果把 $\nu_L$ 和 $l_L$ 看作同位旋二重态，把 $u_L$ 和 $d_{L\theta}$ 也看作同位旋二重态，并令

$$L = \begin{vmatrix} \nu_L \\ l_L \end{vmatrix}, \quad q_L = \begin{vmatrix} u_L \\ d_{L\theta} \end{vmatrix}, \tag{4-91}$$

利用同位旋算符

$$\tau_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\tau_1 + i\tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

则(4-90)式又可以写成

$$l_\mu = \overline{L}\gamma_\mu(\tau_1 + i\tau_2)L, \quad q_\mu = \overline{q}_L\gamma_\mu(\tau_1 + i\tau_2)q_L。 \tag{4-92}$$

这表明：不管是轻子还是夸克，它们都以左手同位旋二重态的形

式，出现在弱作用过程中。这是一个重要的特点。建立弱电统一理论时，要考虑到这些特点。

## §5. 弱电统一规范理论

把几种相互作用统一起来，是人们很久以来就有的愿望。获得成功的，目前还只有 GWS 弱电统一规范理论。G（拉格肖）、W（温伯拉）、S（萨拉姆）等人把弱作用和电磁作用统一起来，用规范理论进行描述。

**规范群** 建立规范理论，首先是选择恰当的规范群。如§1所述，电磁作用是 $U_Q(1)$ 规范理论。上一节表明，弱作用有左手同位旋的特点，属 $SU_L(2)$ 规范群。因此，弱电统一规范理论的规范群，可能就是 $SU_L(2)\times U_Q(1)$。

可是，如(4-91)式所示，左手同位旋二重态，如

$$L=\begin{vmatrix} \nu_L \\ l_L \end{vmatrix}, \tag{4-93}$$

不是 $U_Q(1)$ 的本征态。它的两个成员的电荷不是一样的。中微子 $\nu$ 不带电，$l$ 的电荷为 $-1$。然而，它们的超荷

$$\frac{Y}{2}=Q-T_3=\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2} \tag{4-94}$$

却是相同的。所以，我们选

$$SU_L(2)\times U_Y(1) \tag{4-95}$$

作为统一弱电相互作用的规范群

**左手态和右手态** 在确定规范群的同时或以后，就要确定费米子属于该群的什么表示。如(4-93)式，(4-94)式所示，轻子的左手态，是 $SU_L(2)$ 的二重态，是 $U_Y(1)$ 的 $\frac{Y}{2}=-\frac{1}{2}$。在规范群

$SU_L(2)\times U_Y(1)$的变换下，它的变换规律是

$$L\to L'=e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}+i\frac{1}{2}\theta}L。\tag{4-96}$$

目前认为，中微子没有质量，只有左手态没有右手态。轻子是有质量的，有左手态 $l_L$，也有右手态 $l_R$。左手态 $l_L$，和中微子左手态 $\nu_L$ 一起，构成二重态 $L$。右手态 $l_R$，应该是$SU_L(2)$的单态，属 $U_Y(1)$的

$$\frac{Y}{2}=Q-T_3=-1。$$

在规范群 $SU_L(2)\times U_Y(1)$的变换下，其变换规律为

$$l_R\to l'_R=e^{i\theta}l_R。\tag{4-97}$$

**自由拉格朗日密度** 不管是左手态 $L$，还是右手态 $l_R$，都是费米场。它们的自由场的格拉朗日密度为

$$\mathscr{L}_f=\overline{L}i\gamma^\mu\partial_\mu L+\overline{l}_R i\gamma^\mu\partial_\mu l_R。\tag{4-98}$$

在(4-96)式、(4-97)式表示的规范变换下，当 $\vec{\theta}$ 和$\theta$与时空坐标 $x$ 无关时，(4-98)式是不变的。换句话说，(4-98)式是整体规范不变的。

(4-98)式和通常的自由费米场的拉格朗日密度不同，没有质量项。这是因为，左手态 $L$ 和右手态 $l_R$ 属于群的不同表示。

$\overline{l}l=\overline{l_L}l_R+\overline{l_R}l_L$，在(4-96)式、(4-97)式表示的规范变换下，不是不变的。中微子 $\nu$ 没有质量，只有左手态，在(4-98)式中无它的质量项，是恰当的。轻子 $l$ 有质量，在(4-98)式中无它的质量项，是不足的，需要设法补充。

当群参数 $\vec{\theta}$ 和 $\theta$ 与时空坐标 $x$ 有关时，(4-96)式、(4-97)式表示的变换，是定域规范变换。这时，(4-98)式表示的拉格朗日密度，不是不变的。

**规范场** 在定域规范变换下，场量导数的变换

$$\partial_\mu L \to \partial_\mu L' = \partial_\mu\left(e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}+i\frac{1}{2}\theta} L\right) \neq e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}+i\frac{1}{2}\theta}\partial_\mu L,$$

$$\partial_\mu l_R \to \partial_\mu l'_R = \partial_\mu(e^{i\theta} l_R) \neq e^{i\theta}\partial_\mu l_R$$

与场量的变换(4-96)式、(4-97)式不同，以致拉格朗日密度(4-98)式不是不变的。为了把它修改成定域规范不变的，相应于四个生成元$\frac{\vec{\tau}}{2}$、$\frac{Y}{2}$，我们引进四个规范场$\vec{A}_\mu$、$B_\mu$，把(4-98)式中的场量的时空导数，换成规范导数

$$\partial_\mu L \to D_\mu L = \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu + ig'\frac{1}{2}B_\mu\right)L, \qquad (4\text{-}99)$$

$$\partial_\mu l_R \to D_\mu l_R = (\partial_\mu + ig' B_\mu) l_R,$$

则(4-98)式变成

$$\mathscr{L}_{l+i} = \overline{L} i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu + ig'\frac{1}{2}B_\mu\right)L$$

$$+ \overline{l}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig' B_\mu) l_R。 \qquad (4\text{-}100)$$

要使(4-99)式定义的场量的规范导数，在规范变换下和场量一样变换，即要求

$$\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu + ig'\frac{1}{2}B_\mu\right)L \to \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}'_\mu + ig'\frac{1}{2}B'_\mu\right)L'$$

$$= e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}+i\theta\frac{1}{2}}\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu + ig\frac{1}{2}B_\mu\right)L,$$

$$(\partial_\mu + ig' B_\mu) l_R \to (\partial_\mu + ig' B'_\mu) l'_R = e^{i\theta}(\partial_\mu + ig' B_\mu) l_R。$$

那么，规范场$\vec{A}_\mu$、$B_\mu$的规范变换，就必须是

$$ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu \to ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}'_\mu = e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}} ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}$$

$$-e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\partial_\mu e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}, \qquad (4\text{-}101)$$

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu \theta \frac{Y}{2}。$$

这样，(4-100)式就是在(4-96)式、(4-97)式、(4-101)式表示的规范变换下不变的。

$\vec{A}_\mu$、$B_\mu$是规范场的势。仿照§1、§3的论述，定义规范场强

$$ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu\right)ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\nu$$

$$-\left(\partial_\nu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\nu\right)ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu,$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu, \tag{4-102}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

如§1、§3所述，

$$\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu},\quad B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

在规范变换下是不变的，所以，取

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{4-103}$$

为自由规范场的拉格朗日密度。

**拉格朗日密度** 由以上的论述可知，相互作用的轻子场和规范场的拉格朗日密度，如(4-100)式、(4-103)式所示，为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_l + \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_i,$$

$$\mathscr{L}_l = \overline{L}i\gamma^\mu\partial_\mu L + \overline{l}_R i\gamma^\mu\partial_\mu l_R, \tag{4-104}$$

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu},$$

$$\mathscr{L}_i = g\overline{L}\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}^\mu L - \frac{1}{2}g'\overline{L}\gamma_\mu LB^\mu - g'\overline{l}_R\gamma_\mu l_R B^\mu。$$

其中既没有轻子的质量项，也没有规范场的质量项。质量起源问题，是当今物理学面临的难题。

## §6. 希格斯机制

一般的规范对称理论，都缺少质量项。在(4-104)式中，中微子$\nu$、轻子$l$、规范粒子$\vec{A}_\mu$、$B_\mu$，都没有质量。轻子和三个规范粒子，是有质量的，应该设法产生。1964年，希格斯(Higgs)提出了一种产生质量的机制，叫做希格斯机制。目前，它是人们经常采用的机制。

**希格斯场** 希格斯机制是借助希格斯场使粒子获得质量的机制。希格斯场$\phi(x)$是标量场，在群空间可以有多个分量。它的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_\phi = \partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2, \qquad (4-105)$$

和一般的标量场不同，$\mu^2<0$，$\lambda>0$。它的质量是虚的，而且有自作用。显然，在任意的整体规范变换下，

$$\phi \to \phi' = e^{-i\alpha_a T_a}\phi, \qquad (4-106)$$

$$\mathscr{L}_\phi \to \mathscr{L}_{\phi'} = \mathscr{L}_\phi,$$

(4-105)式是不变的。

**真空破缺** 由(4-105)式确定的希格斯场，有一个十分重要的性质，就是它的真空值不是规范不变的。

$\mathscr{L}_\phi$中的导数项，是动能项。势能项为

$$V = \mu^2\phi^+\phi + \lambda(\phi^+\phi)^2, \qquad (4-107)$$

真空态是势能极小的态。由上式，得

$$\frac{\partial V}{\partial\phi^+\phi} = \mu^2 + 2\lambda\phi^+\phi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^+\phi^2} = 2\lambda > 0。$$

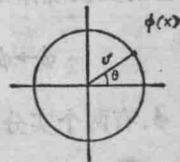
这表明：$\lambda$必需为正，$\mu^2$必需为负，真空值为

$$\phi_0^+\phi_0 = -\frac{\mu^2}{2\lambda},$$

$$\phi_0 = e^{i\theta}|\phi_0|, \qquad (4-108)$$

$$|\phi_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}v, \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}。$$

如右图所示，在$\phi(x)$的复平面上，在半径为$v$的圆上，势能极小。




真空值应该是确定的。选定了确定的$\theta$，就选定了一个确定的真空。例如，令$\theta=0$，则真空值为

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}v, \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}。\tag{4-109}$$

选定了的真空值，在(4-106)式表示的规范变换下，

$$\phi_0 \to \phi_0' = \exp(-i\alpha^a T^a)\phi_0 \neq \phi_0,$$

不是不变的。这叫做真空破缺。

总起来说，希格斯场在规范变换下，拉格朗日密度是不变的，真空是破缺的。

**选择希格斯场**　希格斯场是时空空间的标量。在内部空间，有多少分量，如何变换，却有待按具体情况进行选择。用群论语言来说，希格斯场是群的什么表示，有待讨论确定。在弱电统一规范理论中，采用$SU_L(2)\times U_Y(1)$作为规范群，希格斯场是它的什么表示，需要确定。要使四个规范场中的三个获得质量，希格斯场的分量不能少于四。因此，我们取有四个实分量、两个复分量$\phi_+$、$\phi_0$的希格斯场。$\phi_+$带正电、$\phi_0$不带电。由它们构成$SU_L(2)$二重态

$$\phi = \begin{vmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{vmatrix}, \tag{4-110}$$

它们的超荷

$$\frac{Y}{2} = Q - T_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}。\tag{4-111}$$

这样的选择，就确定了它的变换性质。在 $SU_L(2)\times U_Y(1)$ 变换下，它的变换规律是

$$\phi\to\phi'=\exp(-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}-i\frac{1}{2}\theta)\phi。\tag{4-112}$$

$\phi_+$ 有两个实分量，$\phi_0$ 有两个实分量，由(4-110)表示的 $\phi$ 有四个实分量。我们可以用 $\vec{K}(x)$ 表示它的三个实分量，另一个实分量用 $\eta(x)$ 表示，把四个实分量的 $\phi(x)$ 写成

$$\phi(x)=\exp[i\vec{\tau}\cdot\vec{K}(x)]\begin{vmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+\eta(x))\end{vmatrix},$$

$v$ 是 $\phi(x)$ 的真空值。显然，这样表示中的 $\vec{K}(x)$、$\eta(x)$ 的真空值就都是零，不再破缺了。如果再进行规范变换，令 $\theta=0$，$\vec{\theta}=2\vec{K}(x)$，则

$$\phi\to\phi'=\exp(-i\vec{K}\cdot\vec{\tau})\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}0\\ v+\eta\end{vmatrix},$$

这样确定的希格斯场

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}0\\ v+\eta(x)\end{vmatrix},\tag{4-113}$$

叫做幺正规范下的希格斯场。

**拉格朗日密度** 在(4-112)式表示的规范变换中，当 $\vec{\theta}$、$\theta$ 与时空坐标无关时，即整体规范变换时，场量导数的变换

$$\partial_\mu\phi\to\partial_\mu\phi'=\exp(-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}-i\frac{1}{2}\theta)\partial_\mu\phi$$

和场量的变换一致。这时，(4-105)式表示的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}_\phi=\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi-\mu^2\phi^+\phi-\lambda(\phi^+\phi)^2\tag{4-105}$$

是不变的。

当 $\vec{\theta}$、$\theta$ 与时空坐标 $x$ 有关时，即定域规范变换时，场量导

数的变换

$$\partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi'$$

$$=\partial_\mu\left[\exp\left(-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}-i\frac{1}{2}\theta\right)\phi\right] \neq \exp\left(-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}-\frac{i}{2}\theta\right)\partial_\mu\phi$$

与场量的变换不同，以致

$$\mathscr{L}_\phi \to \mathscr{L}_{\phi}' \neq \mathscr{L}_\phi,$$

(4-105)式表示的拉格朗日密度，不再是不变的。要使它成为在定域规范变换下也是不变的，就要把它们的导数换成规范导数，

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu - ig'\frac{1}{2}B_\mu,$$

$$\mathscr{L}_\phi \to \mathscr{L}_{\phi+1} = (D_\mu\phi)^+ D^\mu\phi - \mu^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2 \tag{4-114}$$

在(4-101)式、(4-112)式表示的规范变换下，它是不变的。

在(4-114)式中，把幺正规范下的希格斯场(4-113)式代入，就得到

$$\mathscr{L}_{\phi+1} = \frac{1}{2}|0, v+\eta|\left(\partial_\mu + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu + ig'\frac{1}{2}B_\mu\right)$$

$$\left(\partial^\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}^\mu - ig'\frac{1}{2}B^\mu\right)\begin{vmatrix}0\\ v+\eta\end{vmatrix}$$

$$-\frac{\mu^2}{2}(v+\eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+\eta)^4,$$

$$\mathscr{L}_{\phi+1} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \mu^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + \frac{g^2}{8}(v+\eta)^2(A_\mu^1 - iA_\mu^2)$$

$$\cdot(A_1^\mu + iA_2^\mu) + \frac{1}{8}(v+\eta)^2(g'B_\mu - gA_\mu^3)(g'B^\mu - gA_3^\mu)。 \tag{4-115}$$

这就是希格斯场以及它和规范场相互作用的拉格朗日密度。当

然,它不再是规范不变的。$\eta(x)$的真空值为0,真空就不再是破缺的了。

**玻色子的质量** 拉格朗日密度中,场量的平方项就是质量项。复玻色场平方项的系数,是复玻色场质量的平方。实玻色场平方的系数,是实玻色场质量平方之半。费米场平方的系数,是费米场的质量。

在(4-115)式中,规范场是以$A_1^\mu \pm iA_2^\mu$、$g'B_\mu - gA_\mu^3$的形式出现的。这表明:规范场的质量本征态,是这些线性组合构成的。因此,将四个规范场$\vec{A}_\mu$、$B_\mu$换成另四个规范场$W_\mu^\pm$、$Z_\mu^0$、$A$,

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2)、W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2),$$

$$Z_\mu^0 = \frac{gA_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}},\quad A_\mu = \frac{g'A_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}},\tag{4-116}$$

后两式是由$(A_\mu^3)^2 + B_\mu^2 = Z_\mu^2 + A_\mu^2$确定的。把(4-116)式代入(4-115)式,就得到

$$\mathscr{L}_{\phi+1} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \mu^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + \frac{g^2}{4}(v+\eta)^2 W_\mu^+ W^{\mu-}$$

$$+ \frac{g^2+g'^2}{8}(v+\eta)^2 Z_\mu Z^\mu。\tag{4-117}$$

这表明:希格斯粒子$\eta(x)$、中间玻色子$W_\mu^\pm$、$Z_\mu^0$是有质量的,

$$m_\eta^2 = -\mu^2 > 0,\quad m_W = \frac{1}{2}gv,\quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2}v,\tag{4-118}$$

而光子$A_\mu$是没有质量的。

**轻子质量** 在(4-104)式中,不存在轻子的质量项。但轻子是有质量的。轻子质量也可以用希格斯场来产生。将轻子场$L$,$l_R$和希格斯场$\phi$以汤川耦合形式耦合起来,即令

$$\mathscr{L}_{l+\phi} = -G_l(\overline{L}\phi l_R + \overline{l_R}\phi^+ L)\tag{4-119}$$

在规范变换下，

$$L \to L' = \exp\left(-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} + i\frac{1}{2}\theta\right)L,$$

$$l_R \to l_{R'} = e^{i\theta} l_R,$$

$$\phi \to \phi' = \exp\left(-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} - i\frac{1}{2}\theta\right)\phi,$$

$$\overline{L}\phi l_R \to \overline{L}'\phi' l'_R = \overline{L}\exp\left(i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} - i\frac{1}{2}\theta\right)e^{-i\frac{1}{2}\theta}\phi e^{i\theta} l_R = \overline{L}\phi l_R,$$

$$\overline{l}_R\phi^+ L \to \overline{l}'_R\phi^{+\prime} L' = \overline{l}_R e^{-i\theta}\phi^+ \exp\left(i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} + i\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$\exp\left(-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} + i\frac{1}{2}\theta\right)L = \overline{l}_R\phi^+ L,$$

$\mathscr{L}_{l+}$ 是不变 的。这正是如此选择的根据。

把幺正规范下的 $\phi$ 和具体的 $L$，即

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 \\ v+\eta \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} v_L \\ l_L \end{vmatrix}$$

代入(4-119)式，得

$$\mathscr{L}_{l+\phi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}G_l(v+\eta)(\overline{l}_L l_R + \overline{l}_R l_L) = -\frac{1}{\sqrt{2}}G_l(v+\eta)\overline{l}\,l。 \tag{4-120}$$

这表明：轻子的质量

$$m_l = \frac{1}{\sqrt{2}}G_l v, \tag{4-121}$$

而中微子是没有质量的。

## 习 题 四

1. 根据(4-17)式、(4-18)式、(4-19)式导出场算符的、具

体的运动方程。

2．证明：拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=\overline{q}\,(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)q+g\,\overline{q}\gamma^{\mu}\frac{\lambda^{a}}{2}qA^{a}_{\mu}-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu},$$

在规范变换

$$q\to q'=\exp\left(-i\alpha^{a}\frac{\lambda^{a}}{2}\right)q,\quad A^{a}_{\mu}\to A^{a\prime}_{\mu}=A^{a}_{\mu}+f^{abc}\alpha^{b}A^{c}_{\mu}-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\alpha^{a}$$

下是不变的。

3．试由(4-58)式导出：质子 $p$、中子 $n$ 和 $\pi^{+}$、$\pi^{-}$、$\pi^{0}$ 介子的哈密顿密度的表示式。

4．导出：在洛仑兹变换、空间反射、规范变换下，

$$\mathscr{L}_{I}=-\frac{G}{\sqrt{2}}J^{+}_{\mu}J^{\mu},\quad J_{\mu}=\overline{\psi}\gamma_{\mu}(1+\gamma_{5})\psi'$$

的变换规律。

5．试由(4-104)式的 $\mathscr{L}_{I}$ 式和(4-116)式导出：轻子场 $l$、$\nu$ 和中间玻色子场 $W^{\pm}_{\mu}$、$Z^{0}_{\mu}$ 的相互作用拉格朗日密度。

6．证明：实希格斯场的 $\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-\frac{\mu^{2}}{2}\phi^{2}-\frac{\lambda}{4}\phi^{4}$，在反射变换 $\phi\to\phi'=-\phi$ 下是不变的，而其真空却不是不变的。

7．已知希格斯场与规范场的拉格朗日密度(4-114)式和线性变换公式(4-116)式，证明：$\mathscr{L}$ 是定域规范不变的，并导出(4-117)式。

# 第五章 微扰理论

自由场方程是线性方程，有平面波解，显出清晰的粒子性质。粒子的算符和态矢，由粒子的产生、消灭算符简易构成。产生、消灭算符成为描述粒子的基本要素。相互作用场方程，是联立的非线性方程，难以求解。而场、粒子又都是相互作用着的。需要讨论它们相互转化的过程，需要计算过程发生的几率。在没有解出相互作用场方程的情况下，只能利用自由场理论的成果。在这一章里，我们论述微扰理论，介绍费曼规则，避开求解相互作用场方程的困难，用自由场理论的成果，计算粒子过程的 $S$ 矩阵元、寿命和截面。

## §1. 相互作用表象和绝热近似

首先，我们介绍相互作用表象和绝热近似。在相互作用表象中，在绝热近似下，可以避开求解相互作用场方程的困难，利用自由场理论的成果，就可以计算粒子过程的 $S$ 矩阵元。

**表象无关性** 在量子理论中，力学系统用态矢 $|a\rangle$ 和算符 $A$ 描写。但是，态矢 $|a\rangle$ 和算符 $A$ 都不能测量，都没有直接的物理意义。有直接物理意义的是态矢的模和算符的平均值，如

$$\langle a|a\rangle, \langle a|A|a\rangle, \cdots \text{等等。}$$

用一幺正算符 $u$，作一表象变换，将一表象中的态矢和算符(如 $|a\rangle$ 和 $A$)，变换成另一表象中的态矢和算符(如 $|a\rangle'$ 和 $A'$)

$$|a\rangle' = u|a\rangle, A' = uAu^{-1}, u^{+} = u^{-1}, \tag{5-1}$$

新的态矢和算符与老的态矢和算符是不同的。但是，态矢的模和算符的平均值却是一样的，如

$$<a'|a>' = <a|u^{+}u|a> = <a|a>,$$
$$<a'|A'|a>' = <a|u^{+}uAu^{-1}u|a> = <a|A|a>。$$

这表明：它们描写的物理事实是相同的。同一物理事实，可以用不同表象的算符和态矢来描述。这叫做表象无关性。这种表象无关性，给我们以方便，我们可以选择任意的表象来进行讨论、计算。用什么表象方便，就采用什么表象。

**三种表象** 由一种表象，用一个幺正算符，如 (5-1) 式所示，就可以得到另一种表象。幺正算符 $u$，可以是任意的，有无穷多种。因而，由一种表象，可以得到无穷多种表象。表象有无穷多种。最常采用的表象有三种。它们是：海森堡 (Heisen-Berg) 表象；薛定谔 (Schrödinger) 表象；相互作用表象。

我们用角标 $h$ 表示海森堡表象中的算符和态矢 $A^{h}$、$|a>^{h}$，它们的运动方程是

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big|a>^{h} = o, \quad \dot{A}^{h} = i[H^{h}, A^{h}]。 \tag{5-2}$$

在第三章讨论自由场时，用的就是这种表象。粒子态矢不随时间变化，粒子算符遵从正则运动方程。

将海森堡表象中的算符和态矢，用幺正算符

$$u = e^{-iH^{s}t}$$

作一幺正变换，就得到薛定谔表象中的态矢和算符

$$|a>^{s} = e^{-iH^{s}t}|a>^{h}, \quad A^{s} = e^{-iH^{s}t}A^{h}e^{iH^{s}t}。 \tag{5-3}$$

$s$ 是薛定谔表象的角标，它们的运动方程是

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big|a>^{s} = H^{s}\Big|a>^{s}, \quad \dot{A}^{s} = 0。 \tag{5-4}$$

由 (5-2) 式、(5-3) 式、就可以证明 (5-4) 式。在一般的量子力学中，就采用这种表象。算符不随时间变化，态矢遵从薛定谔波动方程。

用幺正算符

$$u = e^{iH_0^s t}$$

就可以从薛定谔表象,变换到相互作用表象

$$|a>^I = e^{iH_0^s t}|a>^s, A^I = e^{iH_0^s t}A^s e^{-iH_0^s t}, \tag{5-5}$$

角标 $I$ 表示相互作用表象。由 (5-4) 式、(5-5) 式,可以推知相互作用表象中的运动方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left| a>^I = H_i^I \right| a>, \ \dot{A}^I = i[H_0^I, A^I], \tag{5-6}$$

$H_0$ 是自由场哈密顿量,$H_i$ 是相互作用哈密顿量, $H = H_0 + H_i$ 是总哈密顿量。态矢随时间的变化,由相互作用哈密顿推动。算符的运动,靠自由场哈密顿生成。

(5-2) 式、(5-4) 式、(5-6) 式表示三种表象的各自特点。(5-3) 式、(5-5) 式是三种表象的相互关系。往后,我们将采用相互作用表象,略去它的角标,把 (5-6) 式写成

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left| a> = H_i \right| a>, \ \ \dot{A} = i[H_0, A]。 \tag{5-6}$$

采用相互作用表象的优点是:算符的运动由自由场哈密顿 $H_0$ 生成。换句话说,算符的运动方程就是自由场算符的运动方程。因而,算符有如第三章 (3-50) 式、(3-63) 式、(3-94) 式所示的平面波解

$$\phi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}}(a(k)e^{-ikx} + b^+(k)e^{ikx}),$$

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}(c(p,s)u(p,s)e^{-ipx} + d^+(p,s)v(p,s)e^{ipx}), \tag{5-7}$$

$$A_\mu(x) = \sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e_\mu(k,\lambda)(a(k,\lambda)e^{-ikx} + \overline{a}(k,\lambda)e^{ikx})。$$

这表明：在相互作用表象中，讨论场的相互作用时，场算符就象没有相互作用时一样，可以采用自由场算符的结果，剩下的问题，只是求解态矢的运动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|a\right> = H_i\left|a\right>。\tag{5-8}$$

**运动算符** 为了解决如上式所示的态矢运动问题，我们引进运动算符 $u(t,t_0)$。它的定义是

$$|t\rangle = u(t,t_0)|t_0\rangle,\tag{5-9}$$

它使 $t_0$ 时的状态 $|t_0\rangle$，变成 $t$ 时的状态 $|t\rangle$。由这定义直接推知，它有如下性质：

$$\begin{gathered} u(t_0,t_0)=1, \\ u(t',t)u(t,t_0)=u(t',t_0), \\ u^{-1}(t,t_0)=u(t_0,t)。\end{gathered}\tag{5-10}$$

把 (5-9) 式代入 (5-8) 式，得到它的运动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,t_0)=H_i(t)u(t,t_0),\tag{5-11}$$

取厄米共轭，得

$$-i\frac{\partial}{\partial t}u^+(t,t_0)=u^+(t,t_0)H_i(t)。\tag{5-12}$$

这里假设相互作用哈密顿 $H_i$ 是厄米的，$H_i^+=H_i$。用 $u^+$ 左乘 (5-11) 式，用 $u$ 右乘 (5-12) 式，然后相减，得

$$i\frac{\partial}{\partial t}(u^+(t,t_0)u(t,t_0))=0。$$

这表明：$u^+u$ 是与时间无关的常数。由于 $u^+(t_0,t_0)u(t_0,t_0)=1$，这常数为 1。所以

$$\begin{gathered} u^+(t,t_0)u(t,t_0)=1, \\ u^+(t,t_0)=u^{-1}(t,t_0), \end{gathered}\tag{5-13}$$

运动算符 $u(t,t_0)$ 是幺正的。

由运动算符 $u(t,t_0)$ 的定义 (5-9) 式可知，知道了它的具体形式，就知道了态矢的运动。因此，求解态矢运动方程(5-8)式的问题，就可以用求解运动算符 $u(t,t_0)$ 来代替。它满足运动方程和初始条件

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,t_0)=H_i(t)u(t,t_0),u(t_0,t_0)=1。$$

将上式积分，就得到积分方程

$$u(t,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}dt_1H_i(t_1)u(t_1,t_0)。\qquad(5-14)$$

**迭代解** 相互作用哈密顿 $H_i$ 和耦合常数(如$e$、$G$、$g$) 成正比。当耦合常数很小时，它就是一个小量。电磁作用、弱作用、近距离的颜色强作用，就是如此。在这种情况下，(5-14) 式中的第二项，可以看作小于1 的量。因此，(5-14) 式可以用迭代法解。在零级近似下，(5-14) 式的第二项略去不计，得

$$u_0(t,t_0)=1。$$

在一级近似下，(5-14) 式第二项中的 $u$，取 $u_0=1$，得

$$u_1(t,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}dt_1H_i(t_1)。$$

在二级近似下，(5-14) 式第二项中的 $u$，取 $u_1$，得

$$\begin{aligned}u_2(t,t_0)&=1-i\int_{t_0}^{t}dt_1H_i(t_1)u_1(t_1,t_0)\\&=1-i\int_{t_0}^{t}dt_1H_i(t_1)+(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2H_i(t_1)H_i(t_2)。\end{aligned}$$

如此逐级进行，得

$$\begin{aligned}u(t,t_0)=&1-i\int_{t_0}^{t}dt_1H_i(t_1)+\\&(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2H_i(t_1)H_i(t_2)+\cdots\\&(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_1\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nH_i(t_1)H_i(t_2)\cdots H_i(t_n)+\cdots,\end{aligned}$$

$$u(t,t_0)=\sum_n u^{(n)}(t,t_0),$$

$$u^{(n)}(t,t_0)= \tag{5-15}$$

$$(-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_i(t_1)H_i(t_2)\cdots H_i(t_n)。$$

上式中，对时间积分的上限是不同的。采用编时算符$T$，可以把它们写成是相同的。例如

$$\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_i(t_1)H_i(t_2)$$

$$=\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\theta(t_1-t_2)H_i(t_1)H_i(t_2)$$

$$=\int_{t_0}^{t} dt_2\int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_i(t_2)H_i(t_1)$$

$$=\int_{t_0}^{t} dt_2\int_{t_0}^{t} dt_1\theta(t_2-t_1)H_i(t_2)H_i(t_1)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2\Big(\theta(t_1-t_2)H_i(t_1)H_i(t_2)$$

$$+\theta(t_2-t_1)H_i(t_2)H_i(t_1)\Big)。$$

由于在$H_i$中，若有费米算符，就必以双旋量的形式出现，所以，$H_i$的对易性质，就象玻色算符，因而

$$TH_i(t_1)H_i(t_2)$$

$$=\theta(t_1-t_2)H_i(t_1)H_i(t_2)+\theta(t_2-t_1)H_i(t_2)H_i(t_1),$$

$$\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_i(t_1)H_i(t_2)$$

$$=\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2 TH_i(t_1)H_i(t_2)。$$

推广到$n$重时间积分，就有

$$\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_i(t_1)H_i(t_2)\cdots H_i(t_n)$$

$$=\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2\cdots dt_n TH_i(t_1)H_i(t_2)\cdots H_i(t_n)。$$

这样一来，运动算符的迭代解（5-15）式，就可以写成

$$u(t,t_0)=\sum_n u^{(n)}(t,t_0),$$

$$u^{(n)}(t,t_0)=$$

$$\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1dt_2\cdots dt_nTH_i(t_1)H_i(t_2)\cdots H_i(t_n)。$$

(5-15)

**S 矩阵** 它的定义是

$$S=u(\infty,-\infty),\tag{5-16}$$

它是特定的运动算符,它使 $t=-\infty$ 时的状态,运动成 $t=\infty$ 时的状态。它的迭代解是

$$S=\sum_n S^{(n)}$$

$$S^{(n)}=$$

$$\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1dt_2\cdots dt_nTH_i(t_1)H_i(t_2)\cdots H_i(t_n)。$$

考虑到

$$H_i(t)=\int\mathscr{H}_i(x)d^3x,$$

上式可以写成

$$S=\sum_n S^{(n)},\tag{5-17}$$

$$S^{(n)}=$$

$$\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1,d^4x_2\cdots d^4x_nT\mathscr{H}_i(x_1)\mathscr{H}_i(x_2)\cdots\mathscr{H}_i(x_n)。$$

**S 矩阵元** 在物理中,为了计算方便,常常把过程开始的时刻,定为 $t_i=-\infty$;把过程终了的时刻,定为 $t_f=\infty$。用 $|i>$ 表示过程开始的状态,则

$$S|i>$$

表示过程终了的状态。初态 $|i>$ 是一个确定的状态。终态 $S|i>$ 是包含多种可能的混合状态,可以用一组正交、归一的态矢 $|k>$ 展开

$$S|i\rangle=\sum_k a_k|k\rangle,$$

$a_k$ 是出现状态 $|k\rangle$ 的几率幅。我们把

$$S_{fi}=\langle f|S|i\rangle \tag{5-18}$$

叫做 $S$ 矩阵元。它是在终了状态中，出现状态 $|f\rangle$ 的几率幅 $a_f$。换句话说，$|S_{fi}|^2$ 是由初态 $|i\rangle$ 到终态 $|f\rangle$ 的几率。

**绝热近似** 由以上的论述可知，要计算过程发生的几率，就要计算与过程有关的 $S$ 矩阵元。如 (5-18) 式所示，$S$ 矩阵元由 $S$ 矩阵和初态 $|i\rangle$、终态 $|f\rangle$ 确定。$S$ 矩阵有如 (5-17) 式所示的迭代解。解由制约过程的相互作用哈密顿密度 $\mathscr{H}_i(x)$ 组成。在一定的理论中，$\mathscr{H}_i$ 有一定的形式。例如，在电磁相互作用理论中，

$$\mathscr{H}_i(x)=e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)。 \tag{5-19}$$

而其中的场算符，当采用相互作用表象时，就是如 (5-7) 式所示的自由场算符。总而言之，$S$ 矩阵可以用已知的自由场算符给出。计算 $S$ 矩阵元的问题，就剩下如何确定初态 $|i\rangle$ 和终态 $|f\rangle$ 的问题。

我们设想：在过程发生以前和过程结束之后，参与过程的诸粒子是彼此独立的，是自由粒子。换句话说，$t=-\infty$ 时的初态 $|i\rangle$，是自由粒子态；$t=\infty$ 时的终态 $|f\rangle$，也是自由粒子态。这种设想叫做绝热近似。在绝热近似下，初态 $|i\rangle$ 和终态 $|f\rangle$，都用自由粒子态描述。如第三章所述，自由粒子态，由粒子的产生算符作用于真空态构成。即

$$|i\rangle,|f\rangle\sim a^+b^+c^+\cdots|0\rangle。 \tag{5-20}$$

这样一来，$S$ 矩阵元的计算，只靠自由场理论的知识就可以进行，不必求解非线性的联立方程。

例如，在康普顿散射中，动量为 $k$、极化为 $\lambda$ 的光子，作用于动量为 $p$、自旋为 $s$ 的电子，变成动量为 $k'$、极化为 $\lambda'$ 的

光子和动量为 $p'$、自旋为 $s'$ 的电子

$$\gamma(k,\lambda)+e^-(p,s)\to\gamma(k',\lambda')+e^-(p',s'),$$

初态为

$$|i\rangle=a^+(k,\lambda)c^+(p,s)|0\rangle,$$

終态为

$$|f\rangle=a^+(k',\lambda')c^+(p',s')|0\rangle,$$

$S$ 矩阵元为

$$S_{fi}=\langle 0|a(k',\lambda')c(p',s')Sa^+(k,\lambda)c^+(p,s)|0\rangle, \quad (5\text{-}21)$$

其中

$$S=\sum_n S^{(n)},$$

$$S^{(n)}=\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_nT\mathscr{H}_i(x_1)\mathscr{H}_i(x_2)\cdots\mathscr{H}_i(x_n)。$$

决定该过程的相互作用是电磁相互作用，因而

$$\mathscr{H}_i(x)=e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

而 $\psi$、$\overline{\psi}$、$A_\mu$ 都是自由场算符，其平面波解为

$$\psi(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}(c(p,s)u(p,s)e^{-ipx}+d^+(p,s)v(p,s)e^{ipx}),$$

$$\overline{\psi}(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}(c^+(p,s)\overline{u}(p,s)e^{ipx}+d(p,s)\overline{v}(p,s)e^{-ipx}),$$

$$A_\mu(x)=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e_\mu(k,\lambda)\left(a(k,\lambda)e^{-ikx}+\overline{a}(k,\lambda)e^{ikx}\right)。$$

## §2. 威克定理

在相互作用表象中，在绝热近似下，利用自由场的算符和态矢，就可以计算相互作用过程的 $S$ 矩阵元。但是，计算还是很复杂的。如上一节所示，$S$ 矩阵有无穷多项，其中的每个场量又展开为无穷多个平面波。$S$ 矩阵中的每一项，都由若干个产生算符和消灭算符的乘积组成，都只对一定的过程有作用，对其它过程没有作用。例如，有算符乘积 $a^+(k',\lambda')c^+(p',s')a(k,\lambda)c(p,s)$ 的项，只对 (5-21) 式表示的过程有作用，而且其贡献就是该算符乘积的系数。这是因为

$$<0|a(k',\lambda')c(p',s')a^+(k',\lambda')c^+(p',s')a(k,\lambda)$$
$$c(p,s)a^+(k,\lambda)c^+(p,s)|0>=1。$$

如果算符的排列，不是如上例列举的消灭算符在产生算符的右边，而是有混杂，例如是 $a^+(k',\lambda')a(k,\lambda)c(p,s)c^+(p',s')$ 的情况，它就不只是对 (5-21) 式表示的过程有贡献，还对别的过程有贡献。这是因为

$$a^+(k',\lambda')a(k,\lambda)c(p,s)c^+(p',s')$$
$$=a^+(k',\lambda')a(k,\lambda)[\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\delta_{s,s'}-c^+(p',s')c(p,s)]。$$

由是可知，要使 $S$ 矩阵中的每一项算符乘积只对一个确定的过程有贡献，就必需把算符按照消灭算符在产生算符右边的次序排列。消灭算符排列在产生算符右边的算符乘积，叫做正规乘积。可是，如 (5-17) 式所示，$S$ 矩阵中的算符是按时间次序排列的，不是按消灭、产生次序排列的。为了计算方便，就需要把按时间次序排列的算符乘积，改编为按消灭、产生次序排列的算符乘积。这个改编规律，就是威克(Wick) 定理。

**定义** 为了精确地表述威克定理，我们先定义两个算符 $A(t_1)$、$B(t_2)$ 的编时乘积、正规乘积和收缩。如上节末所示，场

算符的平面波展开，都包括正频部分和负频部分，而且正频部分的算符都是消灭算符，负频部分的算符都是产生算符。我们用$A^+$、$B^+$表示算符的正频部分，表示消灭算符部分；用$A^-$、$B^-$表示算符的负频部分，表示产生算符部分。把$A$、$B$算符分解为

$$A(t_1)=A^+(t_1)+A^-(t_1),B(t_2)=B^+(t_2)+B^-(t_2) \quad (5\text{-}22)$$

算符的编时乘积定义为

$$\begin{aligned}&TA(t_1)B(t_2) \quad (5\text{-}23)\\&=\theta(t_1-t_2)A(t_1)B(t_2)\pm\theta(t_2-t_1)B(t_2)A(t_1)\\&=\theta(t_1-t_2)(A^++A^-)(B^++B^-)\pm\\&\quad\theta(t_2-t_1)(B^++B^-)(A^++A^-),\end{aligned}$$

算符的正规乘积定义为

$$\begin{aligned}:AB:&=:(A^++A^-)(B^++B^-):\\&=A^+B^+\pm B^-A^++A^-B^++A^-B^- \quad (5\text{-}24)\\&=\pm:(B^++B^-)(A^++A^-):\\&=\pm(B^+A^+\pm A^-B^++B^-A^++B^-A^-)。\end{aligned}$$

式中的$\pm$号，当$A$、$B$都是费米算符时，取$-$号；在其它情况时，都取$+$号。算符的收缩定义为

$$\underbrace{AB}=TAB-:AB:, \quad (5\text{-}25)$$

把(5-23)式、(5-24)式代入(5-25)式，得

$$\underbrace{AB}=\theta(t_1-t_2)[A^+,B^-]_\mp\pm\theta(t_2-t_1)[B^+A^-]_\mp。 \quad (5\text{-}26)$$

当$A$、$B$都是费米算符时，取$[A,B]_+=AB+BA$；在其它情况时，都取$[A,B]_-=AB-BA$。由于产生、消灭算符的对易子或反对易子都是数，因而(5-26)式表明：两个算符的收缩是数。将(5-25)式取真空平均值

$$\langle 0|\underbrace{AB}|0\rangle=\langle 0|TAB|0\rangle+\langle 0|:AB:|0\rangle,$$

由于收缩是数不是算符，而正规排列算符的真空平均值总是零，所以

$$\underbrace{AB}=\langle 0|TAB|0\rangle, \quad (5-27)$$

收缩是两点格林函数，常常就是传播子。

**威克定理** 它是把算符的编时乘积改编为正规乘积的规律。我们不予证明地介绍这个定理。两个算符的编时乘积改编为正规乘积的规律，如 (5-25) 式所示，为

$$TAB=:AB:+\underbracket{AB}, \tag{5-28}$$

等于算符的正规乘积，加上可能的一对收缩。

三个算符的编时乘积，改编成正规乘积的规律为

$$TABC=:ABC:+:\underbracket{AB}C:+:\underbracket{ABC}:+:A\underbracket{BC}:, \tag{5-29}$$

等于三个算符的正规乘积，加上三种可能的一对收缩。

四个算符的编时乘积，改编成正规乘积的规律为

$$\begin{aligned}TABCD=&:ABCD:+:\underbracket{AB}CD:+:\underbracket{ABC}D:\\&+:\underbracket{ABCD}:+A\underbracket{BC}D:+:A\underbracket{BCD}:\\&+:AB\underbracket{CD}:+:\underbracket{AB}\,\underbracket{CD}:+:\underbracket{A\overbracket{BCD}}:+:\underbracket{A\overbracket{BC}D}:,\end{aligned} \tag{5-30}$$

等于四个算符的正规乘积，加上包含所有可能一对收缩的正规乘积，再加上所有可能的两对收缩。

对于任意多个算符乘积的威克定理，是上述定理的推广，可以表述为：算符的编时乘积，等于包含所有可能收缩的正规乘积之和。

**$S^{(1)}$的例** 我们把威克定理用于量子电动力学的情况。先讨论 $S^{(1)}$ 中编时乘积的改编。电磁相互作用的哈密顿密度

$$\mathscr{H}_{\rm i}(x)=e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

$$S^{(1)}=-i\int d^4xTe\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

按照威克定理

$$T\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)=:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu:+:\bar{\psi}\gamma_\mu\underbracket{\psi A^\mu}:$$

$$+ :\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A^\mu: + :\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A^\mu:,$$

按照 (5-27) 式和 $a|0\rangle = 0, A^+|0\rangle = 0, \langle 0|a^+ = 0,$

$$\langle 0|A^- = 0,$$

$$\psi A = \langle 0|T\psi A|0\rangle$$

$$= \langle 0|T(\psi^+ + \psi^-)(A^+ + A^-)|0\rangle = \langle 0|T\psi^+ A^-|0\rangle$$

$$= \langle 0|TA^-\psi^+|0\rangle = 0,$$

$$\bar{\psi}A = \langle 0|T\bar{\psi}A|0\rangle$$

$$= \langle 0|T(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)(A^+ + A^-)|0\rangle$$

$$= \langle 0|T\bar{\psi}^+ A^-|0\rangle$$

$$= \langle 0|TA^-\bar{\psi}^+|0\rangle = 0,$$

而$\psi\bar{\psi}$是 (3-165) 式所示的传播子,

$$\psi(x)\ \bar{\psi}(x) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(x)|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \frac{i}{\gamma\cdot p - m} e^{-ip(x-x)}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \frac{i}{\gamma\cdot p - m},$$

显然，它是发散的。为了消除这种发散，可以把电磁作用的哈密顿密度定义为

$$\mathscr{H}_i(x) = :e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x):, \qquad (5-31)$$

在这样的处理下

$$T:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x): = :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x):,$$

同一个时空点的收缩都是零。

实际上，为了消除零点能，也宜把哈密顿密度中的算符按正

规排列。自由场的能量，如 (3-66) 式所示

$$H=\sum_{\vec{p}ss}E(c^{+}(p,s)c(p,s)+d^{+}(p,s)d(p,s)-1)$$

有所谓零点能

$$\sum_{\vec{p}ss}(-E),$$

也是没有意义的。它起源于

$$c^{+}c-cc^{+}=2c^{+}c-1,$$

如果上式的左边也定义为正规乘积

$$:c^{+}c-cc^{+}:=2c^{+}c,$$

就也去除了没有意义的零点能。所以，把物理量中同一时空点的算符，都取正规排列，是使理论更符合实际的一种方法。

在如上所述地处理后，就得到

$$S^{(1)}=-ie\int d^{4}x:\overline{\psi(x)}\gamma_{\mu}\psi(x)A^{\mu}(x):,$$

其中的场算符分成正、负频部分，上式就成为

表 一

| 正 规 乘 积 | 初 态 | 终 态 |
|---|---|---|
| $:\overline{\psi}^{+}\gamma_{\mu}\psi^{+}A^{\mu+}:=\overline{\psi}^{+}\gamma_{\mu}\psi^{+}A^{\mu+}$ | $a^{+}(k;\lambda)c^{+}(p,s)$ $d^{+}(q,\tau)\vert 0\rangle$ | $\vert 0\rangle$ |
| $:\overline{\psi}^{+}\gamma_{\mu}\psi^{+}A^{\mu-}:=A^{\mu-}\overline{\psi}^{+}\gamma_{\mu}\psi^{+}$ | $c^{+}(p,s)d^{+}(q,\tau)\vert 0\rangle$ | $a^{+}(k,\lambda)\vert 0\rangle$ |
| $:\overline{\psi}^{+}\gamma_{\mu}\psi^{-}A^{\mu+}:=-\tilde{\psi}^{-}\tilde{\gamma}_{\mu}\tilde{\overline{\psi}}^{+}A^{\mu+}$ | $a^{+}(k,\lambda)d^{+}(q,\tau)\vert 0\rangle$ | $d^{+}(q,\tau)\vert 0\rangle$ |
| $:\overline{\psi}^{+}\gamma_{\mu}\psi^{-}A^{\mu-}=-A^{\mu-}\tilde{\psi}^{-}\tilde{\gamma}_{\mu}\tilde{\overline{\psi}}^{+}$ | $d^{+}(q,\tau)\vert 0\rangle$ | $d^{+}(q,\tau)a^{+}(k,\lambda)\vert 0\rangle$ |
| $:\overline{\psi}^{-}\gamma_{\mu}\psi^{+}A^{\mu+}:=\overline{\psi}^{-}\gamma_{\mu}\psi^{+}A^{\mu+}$ | $a^{+}(k,\lambda)c^{+}(p,s)\vert 0\rangle$ | $c^{+}(p,s)\vert 0\rangle$ |
| $:\overline{\psi}^{-}\gamma_{\mu}\psi^{+}A^{\mu-}:=A^{\mu-}\overline{\psi}^{-}\gamma_{\mu}\psi^{+}$ | $C^{+}(p,s)\vert 0\rangle$ | $c^{+}(p,s)a^{+}(k,\lambda)\vert 0\rangle$ |
| $:\overline{\psi}^{-}\gamma_{\mu}\psi^{-}A^{\mu+}:=\overline{\psi}^{-}\gamma_{\mu}\psi^{-}A^{\mu+}$ | $a^{+}(k,\lambda)\vert 0\rangle$ | $d^{+}(q,\tau)c^{+}(p,s)\vert 0\rangle$ |
| $:\overline{\psi}^{-}\gamma_{\mu}\psi^{-}A^{\mu-}=\overline{\psi}^{-}\gamma_{\mu}\psi^{-}A^{\mu-}$ | $\vert 0\rangle$ | $a(k,\lambda)d^{+}(q,\tau)c^{+}$ $(p,s)\vert 0\rangle$ |

$$S^{(1)} = -ie\int d^4x\,:(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)\gamma_\mu(\psi^+ + \psi^-)(A \quad + A^{\mu-}):,$$

是 $2^3=8$ 个正规乘积之和，与之有关的过程，如表一所示。

**$S^{(2)}$ 的例** 量子电动力学中的

$$S^{(2)} = -e^2\int d^4x_1 d^4x_2\, T\,\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1 A_1^\mu \bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2 A_2^\nu,$$

场量的角标1、2，表示时空点的坐标。按照威克定理和同一时空点的收缩为零，并考虑到

$$\langle 0|\psi_1\psi_2|0\rangle = \langle 0|(\psi_1^+ + \psi_1^-)(\psi_2^+ + \psi_2^-)|0\rangle = 0,$$

$$\langle 0|\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|0\rangle = \langle 0|(\bar{\psi}_1^+ + \bar{\psi}_1^-)(\bar{\psi}_2^+ + \bar{\psi}_2^-)|0\rangle = 0,$$

上式中的编时乘积改编为

$$\begin{aligned}
&T\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2 A_1^\mu A_2^\nu \\
&= :\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2 A_1^\mu A_2^\nu: + :\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2 \underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}: \\
&+ :\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2 A_1^\mu A_2^\nu: + :\underbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2} A_1^\mu A_2^\nu: \\
&+ :\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2 \underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}: + :\underbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2}\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}: \\
&+ :\overbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2} A_1^\mu A_2^\nu: + :\overbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2}\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:,
\end{aligned}$$

共八项。若再分成正、负频部分，就有

$$2^6 + 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1 = 129$$

项。其中正规乘积128项。有些正规乘积和相应的过程，如表二所示。

表　二

| 正规乘积 | 初　态 | 终　态 | 过　程 |
|---|---|---|---|
| $:\bar{\psi}^-\gamma_\mu\psi^+\bar{\psi}^-\gamma_\nu\psi^+ \underbrace{A^\mu A^\nu}:$ | $c^+(p,s)c^+(q,\tau)\|0\rangle$ | $c^+(p',s')c^+(q',\tau')\|0\rangle$ | 莫雷散射 |
| $:\bar{\psi}^-\gamma_\mu\psi^+\bar{\psi}^+\gamma_\nu\psi^- \underbrace{A^\mu A^\nu}:$ | $c^+(p,s)d^+(q,\tau)\|0\rangle$ | $c^+(p',s')d^+(q',\tau')\|0\rangle$ | 巴巴散射 |

表二续

| 正规乘积 | 初态 | 终态 | 过程 |
|---|---|---|---|
| $:\bar{\psi}^-\gamma_\mu \underbrace{\psi\ \bar{\psi}}\gamma_\nu\psi^+ A^\mu_- A^\nu_+:$ | $a^+(k,\lambda)c^+(p,s)\|0>$ | $a^+(k',\lambda')c^+(p',s')\|0>$ | 康普顿散射 |
| $:\bar{\psi}^+\gamma_\mu \underbrace{\psi\ \bar{\psi}}\gamma_\nu\psi^+ A^\mu_- A^\nu_-:$ | $c^+(p,s)d^+(q,\tau)\|0>$ | $a^+(k,\lambda)a^+(k',\lambda')\|0>$ | 双光子湮灭 |
| $:\bar{\psi}^-\gamma_\mu \underbrace{\psi\ \bar{\psi}}\gamma_\nu\psi^+ \underbrace{A^\mu A^\nu}:$ | $c^+(p,s)\|0>$ | $c^+(p',s')\|0>$ | 电子自能 |
| $:\underbrace{\bar{\psi}\gamma_\mu\overbrace{\psi\ \bar{\psi}}\gamma_\nu\psi} A^\mu_- A^\nu_+:$ | $a^+(k,\lambda)\|0>$ | $a^+(k',\lambda')\|0>$ | 光子自能 |
| $\overbrace{\bar{\psi}\gamma_\mu\underbrace{\psi\bar{\psi}}}\gamma_\nu\psi \underbrace{A^\mu A^\nu}$ | $\|0>$ | $\|0>$ | 真空极化 |

## §3. 费曼规则

在粒子物理中，我们要计算粒子反应过程的几率。粒子由初态 $|i>$，经过相互作用，反应成终态 $|f>$ 的几率幅，就是$S$矩阵元

$$S_{fi}=<f|S|i>。$$

所以，要计算粒子过程的几率，就首先要计算该过程的 $S$ 矩阵元 $S_{fi}$。$S$ 矩阵在耦合常数足够小的条件下，可以作微扰展开

$$S=\sum S^{(n)},$$

$$S^{(n)}=\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n T\mathscr{H}_i(x_1)\mathscr{H}_i(x_2)\cdots\mathscr{H}_i(x_n),$$

对于不同的理论，$\mathscr{H}_i(x)$ 有不同的形式。例如，在费米子的电磁作用中

$$\mathscr{H}_i(x)=e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

在相互作用表象中，场量都是自由场算符，都有平面波解

$$\psi(x)=\psi^{+}(x)+\psi^{-}(x),$$

$$\psi^{+}(x)=\sum\sqrt{\frac{m}{VE}}c(p,s)u(p,s)e^{-ipx},$$

$$\psi^{-}(x)=\sum\sqrt{\frac{m}{VE}}d^{+}(p,s)v(p,s)e^{ipx},$$

$$\overline{\psi}(x)=\overline{\psi}^{+}(x)+\overline{\psi}^{-}(x),$$

$$\overline{\psi}^{+}(x)=\sum\sqrt{\frac{m}{VE}}d(p,s)\overline{v}(p,s)e^{-ipx},$$

$$\overline{\psi}^{-}(x)=\sum\sqrt{\frac{m}{VE}}c^{+}(p,s)\overline{u}(p,s)e^{ipx}, \tag{5-32}$$

$$A_{\mu}(x)=A_{\mu}^{+}(x)+A_{\mu}^{-}(x),$$

$$A_{\mu}^{+}(x)=\sum\frac{e_{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}a(k,\lambda)e^{-ikx},$$

$$A_{\mu}^{-}(x)=\sum\frac{e_{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\overline{a}(k,\lambda)e^{ikx}。$$

再者，$S$ 矩阵中的编时乘积，又都可以按威克定理展开为正规乘积

$$TABC\cdots=:ABC\cdots:+:\underbrace{AB}C\cdots:+\cdots\cdots,$$

这样一来，$S$ 矩阵就是无穷多项自由场算符的正规乘积之和。

对于确定的过程，有确定的初态 $|i>$ 和终态 $|f>$。在绝热近似下，它们都是自由粒子态，都由粒子的产生算符作用于真空态构成。对于该过程的 $S$ 矩阵元 $S_{fi}$，$S$ 矩阵的无穷多个正规乘积中，只有能消灭初态粒子并产生终态粒子的那些项才有贡献。我们用实例予以说明，找出 $S$ 矩阵元和费曼图形之间的对应规则，以简化 $S$ 矩元的计算。总之，我们从实例导出费曼规则，然后应用费曼规则写出 $S$ 矩阵元。

**电子对湮灭为光子** 动量为 $p$、自旋为 $s$ 的电子和动量为 $q$、自旋为 $\tau$ 的正电子，湮灭为动量为 $k$、极化为 $\lambda$ 的光子，过程表示为

$$e^-(p,s)+e^+(q,\tau)\rightarrow\gamma(k,\lambda)。$$

该过程的初态和终态为

$$|i>=c^+(p,s)d^+(q,\tau)|0>,\ |f>=a^+(k,\lambda)|0>。$$

决定该过程的作用是电磁作用，其理论为

$$\mathscr{H}_1(x)=e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)。$$

对该过程有关的 $S$ 矩阵是包含消灭初态电子对、产生终态光子的那些项，如

$$S^{(1)}\sim -ie\int d^4x:\bar{\psi}^+(x)\gamma_\mu\psi^+(x)A^{\mu-}(x):$$

$$S^{(3)}\sim\frac{(-ie)^3}{3!}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3:\bar{\psi}_1^+\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_3}\gamma_\lambda\psi_3^+$$

$$\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}A_3^{\lambda-}:,$$

……

实际上，还是有无穷多项。如果限于最低阶近似，其 $S$ 矩阵元就是

$$S_{fi}^{(1)}=-ie\int d^4x<0|a(k,\lambda):\bar{\psi}^+(x)\gamma_\mu\psi^+(x)A^{\mu-}(x):$$

$$c^+(p,s)d^+(q,\tau)|0>。$$

其中，$\psi^+(x)$ 的任务是消灭初态电子，$\bar{\psi}^+(x)$ 的任务是消灭初态正电子，$A^{\mu-}(x)$ 是产生终态光子。因此，上式可以写成

$$S_{fi}^{(1)}=-ie\int d^4x[a(k,\lambda),A^{\mu-}(x)]$$

$$\{\overline{\psi^+}(x),d^+(q,\tau)\}\gamma_\mu\{\psi^+(x),c^+(p,s)\}。$$

把场量的正、负频解 (5-32) 式代入上式的对易子、反对易子，得

$$[a(k,\lambda),A^{\mu-}(x)]$$

$$=\left[a(k,\lambda),\sum_{k',\lambda'}\frac{e^\mu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\bar{a}(k',\lambda')e^{ik'x}\right]$$

$$=\frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}e^{ikx},$$

$$\{\overline{\psi}_{-}^{+}(x),d^{+}(q,\tau)\}$$

$$=\left\{\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}d(p,s)\overline{v}(p,s)e^{-ipx},d_{-}^{+}(q,\tau)\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\overline{v}(q,\tau)e^{-iqx},$$

$$\{\psi^{+}(x),c^{+}(p,s)\}$$

$$=\left\{\sum_{\vec{p}',s'}\sqrt{\frac{m}{VE}}c(p',s')u(p',s')e^{-ip'x},c_{-}^{+}(p,s)\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)e^{-ipx},$$

而 $S$ 矩阵元就是

$$S_{fi}^{(1)}=-ie\int d^4x\frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}e^{ikx}$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\overline{v}(q,\tau)e^{-iqx}\gamma_{\mu}\sqrt{\frac{m}{VE_d}}u(p,s)e^{-ipx},$$

$$S_{fi}^{(1)}=\frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\overline{v}(q,\tau)(-ie\gamma_{\mu}(2\pi)^4\delta^4(k-p-q))$$

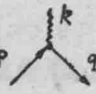
$$\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)。\tag{5-33}$$

我们用 ⌇ 表示光子的产生：用 ↗ 表示电子的消灭；用 ↘ 表示正电子的消灭，用≻∿表示顶角，而且它们与 $S$ 矩阵元中的因子的对应关系是

⌇ $\frac{e_{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$； ↗ $\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)$；

$$\searrow \quad \sqrt{\frac{m}{VE}}\,\bar{v}(p,s)\text{；} \quad \rightharpoondown\!\!< \quad -ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(\cdots)\text{。} \tag{5-34}$$

那末，就可以用费曼图



(5-35)

表示电子对湮灭为光子的过程，表示过程的 $S$ 矩阵元 (5-33) 式。实际上，只要按照 (5-34) 式表示的对应规则，逆着费米子线的顺序，就可以写出 $S$ 矩阵元 (5-33) 式。对于玻色子线的因子，是数不是矩阵，它的位置是可以任意的。

顶角因子中的 $\delta$- 函数，是保证能量、动量守恒的。在电子对湮灭为光子的情况，使电子动量 $p$、正电子动量 $q$、光子动量 $k$，满足方程

$$p+q=k\text{。}$$

可是，电子、正电子、光子都是实粒子，都要满足相对论的能量、动量、质量条件

$$p^2=m^2,\ q^2=m^2,\ k^2=0,$$

它与上式矛盾。实际上，电子对湮灭为单个光子的实过程是不能发生的。这里，我们只是为了导出费曼规则而引用的。

**莫雷散射**　一个动量为 $p$、自旋为 $s$ 的电子和一个动量为 $q$、自旋为 $\tau$ 的电子，碰撞以后成为一个动量为 $p'$、自旋为 $s'$ 的电子和一个动量为 $q'$、自旋为 $\tau'$ 的电子

$$e^-(p,s)+e^-(q,\tau)\rightarrow e^-(p',s')+e^-(q',\tau'),$$

其初态和终态为

$$|i\rangle=c^+(p,s)c^+(q,\tau)|0\rangle,$$

$$|f\rangle=c_-^+(p',s')c_-^+(q',\tau')|0\rangle,$$

这过程是电磁作用过程，相互作用哈密顿为

$$\mathscr{H}_1(x)=e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

与该过程有关的 $S$ 矩阵是能够消灭初态电子、产生终态电子的项，如

$$S^{(2)}\sim\frac{(-ie)^2}{2}\int d^4x_1d^4x_2:\overline{\psi}^-{}_1\gamma_\mu\psi_1^+\overline{\psi}_2^-\gamma_\nu\psi_2^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:,$$

$$S^{(4)}\sim\frac{(-ie)^4}{4!}$$

$$\int d^4x_1d^4x_4:\overline{\psi}^-{}_1\gamma_\mu\psi_1^+\ \overline{\psi}_2^-\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\overline{\psi}_3}\gamma_\lambda\underbrace{\psi_3\overline{\psi}_4}\gamma_\rho\psi_4^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}\underbrace{A_3^\lambda A_4^\rho}:,$$

…………

取最低阶近似，$S$ 矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)}=\frac{(-ie)^2}{2}\int d^4x_1d^4x_2<0|c(p',s')c(q',\tau'):$$

$$\overline{\psi}^-_1\gamma_\mu\psi_1^+\ \overline{\psi}_2^-\gamma_\nu\psi_2^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^+(p,s)c^+(p,\tau)|0>。$$

其中，$\psi_1^+$ 和 $\psi_2^+$ 的任务是消灭初态电子，有两种方式：$\psi_1^+$ 消灭第一个电子，$\psi_2^+$ 消灭第二个电子；或者 $\psi_1^+$ 消灭第二个电子，$\psi_2^+$ 消灭第一个电子。$\overline{\psi}_1^-$ 和 $\overline{\psi}_2^-$ 的任务是产生终态电子，也有两种方式：$\overline{\psi}_1^-$ 产生第三个电子，$\overline{\psi}_2^-$ 产生第四个电子；或者 $\overline{\psi}_1^-$ 产生第四个电子，$\overline{\psi}_2^-$ 产生第三个电子。所以，共有四种消灭、产生的组合方式，上式就成为四项之和。但是有两项与另两项的差别，只是 $x_1\leftrightarrows x_2$。而 $x_1$、$x_2$ 都是哑变量，故实际上是相等的。因而，只取两项，并消去$\frac{1}{2}$因子，$S$ 矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)}=e^2\int d^4x_1d^4x_2\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)}$$

$$(\{c(p',s'),\overline{\psi}^-(x_1)\}\gamma_\mu\{\psi^+(x_1),c^+(p,s)\}$$

$$\{c(q',\tau'),\overline{\psi}^-(x_2)\}\gamma_\nu\{\psi^+(x_2),c^+(q,\tau)\}$$

$$-\{c(q',\tau'),\ \bar{\psi}^-(x_1)\}\gamma_\mu\{\psi^+(x_1),c^+(p,s)\}$$

$$\{c(p',s'),\ \bar{\psi}^-(x_2)\}\gamma_\nu\{\psi^+(x_2),c^+(q,\tau)\})。$$

注意：第二项与第一项差一负号，是由于费米算符多一次换位引起的。这个负号是十分重要的，而S矩阵元的总位相因子是无关紧要的。

把场量的正、负频解（5-32）式代入反对易子，得

$$\{c(p',s'),\ \bar{\psi}^-(x_1)\}$$

$$=\left\{c(p',s'),\ \sum_{\vec{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\,c^+(p,s)\,\bar{u}(p,s)e^{ipx_1}\right.$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\bar{u}(p',s')e^{ip'x_1},$$

$$\{c(q',\tau'),\ \bar{\psi}^-(x_2)\}$$

$$=\left\{c(q',\tau'),\sum_{\vec{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\,c^+(p,s)\,\bar{u}(p,s)e^{ipx_2}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\,\bar{u}(q',\tau')e^{iq'x_2},$$

$$\{\psi^+(x_1),c^+(p,s)\}$$

$$=\left\{\sum_{\vec{p}'s'}\sqrt{\frac{m}{VE}}\,c(p',s')u(p',s')e^{-ip'x_1},c^+(p,s)\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)e^{-ipx_1},$$

$$\{\psi^+(x_2),\ c^+(q,\tau)\}$$

$$=\left\{\sum_{\vec{p}'s'}\sqrt{\frac{m}{VE}}\,c(p',s')u(p',s')e^{-ip'x_2},c^+(q,\tau)\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,u(q,\tau)e^{-iqx_2}。$$

而光子的收缩，就是光子的传播子，如(3-168)式所示，为

$$\underbrace{A^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2)} = \langle 0|TA^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2)|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} e^{-ik(x_1-x_2)},$$

把它们代入 $S_{fi}^{(2)}$ 式，就得到

$$S_{fi}^{(2)} = e^2\int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} e^{-ik(x_1-x_2)}$$

$$\Big(\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')e^{ip'x_1}\gamma_\mu \sqrt{\frac{m}{VE_p}}\, u(p,s)e^{-ipx_1}$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\,\overline{u}(q',\tau')e^{iq'x_2}\gamma_\nu \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\, u(q,\tau)e^{-iqx_2}$$

$$-\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\,\overline{u}(q',\tau')e^{iq'x_1}\gamma_\mu \sqrt{\frac{m}{VE_p}}\, u(p,s)e^{-ipx_1}$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')e^{ip'x_2}\gamma_\nu \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\, u(q,\tau)e^{-iqx_2}\Big),$$

对 $x_1$、$x_2$ 积分，得

$$S_{fi}^{(2)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}$$

$$\Big(\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(p'-k-p)\Big)$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\, u(p,s)\cdot$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\,\overline{u}(q',\tau')(-ie\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^4(k+q'-q))$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\, u(q,\tau)$$

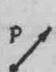
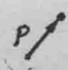
$$\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\,\overline{u}(q',\tau')(-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(q'-k-p))$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s);$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^4(k+p'-q))$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,u(q,\tau)。\tag{5-36}$$

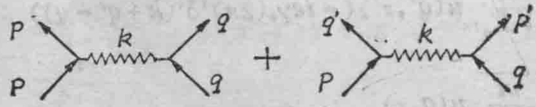
与前例相似，我们用↗表示电子的产生；用↗表示电子的消灭；用≻∿表示顶角；用∿表示光子的传播子。而且，它们和 $S$ 矩阵元中的因子的对应关系是

 $\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,\overline{u}(p,s)$；  $\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)$；

 $$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon};$$

 $$-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(\cdots),\tag{5-37}$$

那末，就可以用费曼图



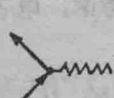
表示莫雷散射过程，表示过程的$S$矩阵元$S_{fi}^{(2)}$。第二个图形与第一个图形的差别，仅仅是产生的两个费米子的位置的交换。这正是$S_{fi}^{(2)}$中两项差一负号的原因。从（5-38）式表示的费曼图出发，按照（5-37）式表示的对应规则，逆着费米子线的顺序，考虑到费米子交换差一负号，就可以写出过程的$S$矩阵元（5-36）式。

在（5-36）式中，取对$k$的积分，得

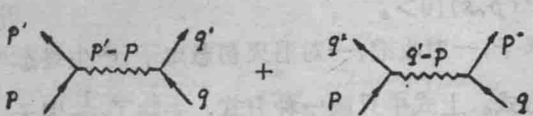
$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} = & (2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q') \\
& \Big(\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\mu)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s) \\
& \sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\,\overline{u}(q',\tau')(-ie\gamma_\nu)\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,u(q,\tau) \\
& -\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\,\overline{u}(q',\tau')(-ie\gamma_\mu)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s) \\
& \sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\nu)\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,u(q,\tau)\Big)。 \qquad (5\text{-}39)
\end{aligned}
$$

这时，顶角上的一个$\delta$-函数，被一个传播子的动量积分消去，剩下一个$\delta$-函数，保证整个过程的能量、动量守恒。费曼图中的顶角和传播子，与矩阵元中的因子的对应关系，可以写成



$\dfrac{-ig^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}$，

$-ie\gamma_\mu$ （5-40）

（5-38）式表示的费曼图中的动量标记，为



从它出发，按照(5-37)式、(5-40)式表示的对应规则，逆着费米子线的顺序，考虑到费米子交换差一负号，加上保证整个过程的能量、动量守恒的$\delta$-函数，就可以写出(5-39)式表示的$S$矩阵元。

**电子自能** 由于电磁作用，电子会不断放射和吸收光子。这种过程，叫做电子自能过程

$$e^-(p,s)\to e^-(p',s')。$$

其初态、末态，都只是一个电子

$$|i\rangle=c^+(p,s)|0\rangle,\quad |f\rangle=c^+(p',s')|0\rangle,$$

制约着该过程的哈密顿密度，仍然是

$$\mathscr{H}_i(x)=e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)。$$

$S$矩阵中，与该过程有关的项，为

$$S^{(0)}=1,$$

$$S^{(2)}\sim\frac{(-ie)^2}{2}\int d^4x_1d^4x_2:\bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:,$$

$$S^{(4)}\sim\frac{(-ie)^4}{4!}$$

$$\int d^4x_1\cdots d^4x_4:\bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_3}\gamma_\lambda\underbrace{\psi_3\bar{\psi}_4}\gamma_\rho\psi_4^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}\underbrace{A_3^\lambda A_4^\rho}:,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$S^{(0)}$使电子不变，不予考虑。电子自能过程中最低阶近似应是$S^{(2)}$，其$S$矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)}=(-ie)^2\int d^4x_1d^4x_2\langle 0|c(p',s'):$$

$$\bar{\psi}^-(x_1)\gamma_\mu\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}\gamma_\nu\psi^+(x_2)\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)}:$$

$$c^+(p,s)|0\rangle。$$

两对费米子，一对收缩，一对消灭初态电子、产生终态电子，有两种可能方式。上式中只取一种方式，去除了$\frac{1}{2}$因子，就是这个

缘故。$\psi^+(x_2)$ 的任务是消灭初态电子，$\overline{\psi^-}(x_1)$的任务是产生终态电子，故

$$S^{(2)}_{fi}=(-ie)^2\int d^4x_1d^4x_2\{c(p',s),\overline{\psi^-}(x_1)\}$$

$$\gamma_\mu\underbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\{\psi^+(x_2),c^+(p,s)\}\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu}(x_2)。$$

如前所述，反对易子和传播子为

$$\{c(p',s'),\overline{\psi^-}(x_1)\}$$

$$=\left\{c(p',s'),\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\,c^+(p,s)\,\overline{u}(p,s)e^{ipx_1}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')e^{ip'x_1}.$$

$$\{\psi^+(x_2),c^+(p,s)\}$$

$$=\left\{\sum_{\vec{p}',s'}\sqrt{\frac{m}{VE}}\,c(p',s')u(p',s')e^{-ip'x_2},c^+(p,s)\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)e^{-ipx_2},$$

$$\underbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)=\langle 0|T\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0\rangle$$

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{\gamma\cdot p-m}e^{-ip(x_1-x_2)},$$

$$\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu}(x_2)=\langle 0|TA^\mu(x_1)A^\nu(x_2)|0\rangle$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}e^{-ik(x_1-x_2)},$$

代入上式，得

$$S^{(2)}_{fi}=(-ie)^2\int d^4x_1d^4x_2\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')e^{ip'x_1}\gamma_\mu$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma\cdot q - m} e^{-iq(x_1-x_2)} \gamma_\nu \sqrt{\frac{m}{VE_p}} u(p,s) e^{-ipx_2}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} e^{-ik(x_1-x_2)},$$

对时空坐标积分，得

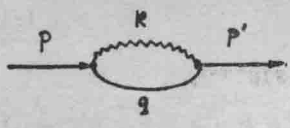
$$S_{fi}^{(2)} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}} \overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(p'-q-k))$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot q - m}(-ie\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^4(q+k-p)) \qquad (5\text{-}41)$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_p}} u(p,s)。$$

用费曼图




(5-42)

表示这个过程和相应的 $S$ 矩阵元。其对应关系是

$$\nearrow \sqrt{\frac{m}{VE}} \overline{u}(p,s); \qquad \nearrow \sqrt{\frac{m}{VE}} u(p,s);$$

$$\rightarrow \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma\cdot q - m}; \qquad \sim\!\!\sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}, \qquad (5\text{-}43)$$

$$\succ\!\sim \ -ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(\cdots)。$$

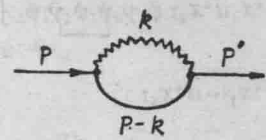
在 (5-41) 式中，取对 $q$ 的积分，就消去一个 $\delta$-函数，剩下一个表明整个过程能量、动量守恒的$\delta$-函数，得

$$S_{fi}^{(2)} = (2\pi)^4\delta^4(p-p') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\mu)\frac{i}{\gamma\cdot(p-k)-m}(-ie\gamma_\nu)$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)。\tag{5-44}$$

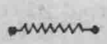
还有一个对 $k$ 的积分不能消去，叫做回路积分。这时 (5-42) 式表示的费曼图，可以表示为

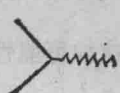



(5-45)

(5-44) 式、(5-45) 式的对应关系是

 $\sqrt{\frac{m}{VE}}\,\overline{u}(p,s)$，  $\sqrt{\frac{m}{VE}}\,u(p,s)$，

 $\frac{i}{\gamma\cdot p-m}$，  $\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}$，

 $-ie\gamma_\mu$。 (5-46)

$\delta$- 函数是表示整个过程的，对 $k$ 的积分是属于一个回路的。

**真空极化** 从空穴理论的观点看来，真空态是空穴都被填满的状态。当存在电磁场时，空穴和负能电子将发生相对移动，叫做真空极化。从量子电动力学的观点看来，光子会不断地变成电子对，随即又湮灭成光子，即有过程

$$\gamma(k,\lambda)\to\gamma(k',\lambda'),$$

初态、终态都是一个光子

$$|i> = a^+(k,\lambda)|0>, \quad |f> = a^+(k',\lambda')|0>.$$

制约着这个过程的哈密顿密度，是

$$\mathscr{H}_i(x) = e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)。$$

$S$ 矩阵中，影响这个过程的项，有

$$S^{(0)} = 1,$$

$$S^{(2)} \sim \frac{(-ie)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 : \overline{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\overline{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2 A_1^{\mu-}A_2^{\nu+}:,$$

$$S^{(4)} \sim \frac{(-ie)^4}{4!}\int d^4x_1\cdots d^4x_4 :$$

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\overline{\psi}_2}\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\overline{\psi}_3}\gamma_\lambda\underbrace{\psi_3\overline{\psi}_4}\gamma_\rho\psi_4\ \underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}A_3^{\lambda-}A_4^{\rho+}:,$$

............

除去 $S^{(0)}$ 的不变作用外，最低阶的作用是 $S^{(2)}$，$S$ 矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2\int d^4x_1 d^4x_2 <0|a(k',\lambda'):$$

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\overline{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2 A^{\mu-}(x_1)A^{\nu+}(x_2):a^+(k,\lambda)|0>。$$

$A^{\nu+}(x_2)$的任务是消灭初态光子，$A^{\mu-}(x_1)$ 的任务是产生终态光子。还有一种可能是：$A^{\mu+}(x_1)$ 消灭初态光子，$A^{\nu-}(x_2)$ 产生终态光子。上式中没有$\frac{1}{2}$的因子，就是考虑这种可能性的结果。因此

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2\int d^4x_1 d^4x_2 [a(k',\lambda'), A^{\mu-}(x_1)]$$

$$\overline{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\overline{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2[A^{\nu+}(x_2), a^+(k,\lambda)]。$$

如前所述，对易子和传播子为

$[a(k',\lambda'), A^{\mu-}(x_1)]$

$$= \left[ a(k',\lambda'), \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}} \overline{a}(k,\lambda) e^{ikx_1} \right]$$

$$= \frac{e^{\mu}(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}} e^{ik'x_1},$$

$$[A^{\nu}_{-}{}^{+}(x_2), a^{+}(k,\lambda)]$$

$$= \left[ \sum_{\vec{k}',\lambda'} \frac{e^{\nu}(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}} a(k',\lambda') e^{-ik'x_2}, a^{+}(k,\lambda) \right]$$

$$= \frac{e^{\nu}(k,\lambda)}{\sqrt{2Vw}} e^{-ikx_2},$$

$$\overline{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_1 \overline{\psi}_2 \gamma_\nu \psi_2 = -\mathrm{Tr}\, \psi_2 \overline{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_1 \overline{\psi}_2 \gamma_\nu,$$

$$\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2) = \langle 0 | T\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2) | 0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma \cdot p - m} e^{-ip(x_1 - x_2)}。$$

代入上式，得

$$S^{(2)}_{fi} = (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{e^{\mu}(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}} e^{ik'x_1}$$

$$(-\mathrm{Tr}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma \cdot p - m} e^{-ip(x_2 - x_1)} \gamma_\mu$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma \cdot q - m} e^{-iq(x_1 - x_2)} \gamma_\nu$$

$$\frac{e^{\nu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}} e^{-ikx_2},$$

对时空坐标 $x_1$、$x_2$ 积分，得

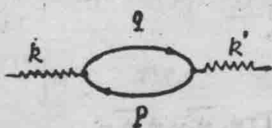
$$S^{(2)}_{fi} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

$$\frac{e^{\mu}(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\frac{e^{\nu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$$

$$(-\mathrm{Tr})\ \frac{i}{\gamma\cdot p-m}(-ie\gamma_{\mu}(2\pi)^4\delta^4(k'+p-q))$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot q-m}(-ie\gamma_{\nu}(2\pi)^4\delta^4(q-p-k))。\qquad (5\text{-}47)$$

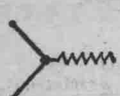
用费曼图




(5-48)

表示这个过程和 $S$ 矩阵元 $S^{(2)}_{fi}$，其对应关系应该是

 $\quad \dfrac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$；  $\quad \displaystyle\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{\gamma\cdot p-m}$；

 $\quad -ie\gamma_{\mu}(2\pi)^4\delta^4(\cdots)$。 (5-49)

对于一个闭合的费米子圈，在 $S$ 矩阵元中应该附加一个因子 $(-\mathrm{Tr})$。

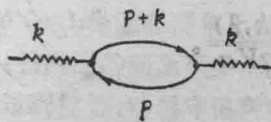
在 (5-47) 式中，对一个费米子内线取积分，消除一个 $\delta$- 函数，得到

$$S^{(2)}_{fi}=(2\pi)^4\delta^4(k'-k)\ \frac{e^{\mu}(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\ \frac{e^{\nu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$$

$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{Tr})\ \frac{i}{\gamma\cdot p-m}(-ie\gamma_{\mu})$$

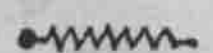
$$\frac{i}{\gamma\cdot(p+k)-m}(-ie\gamma_\nu)。\qquad (5\text{-}50)$$

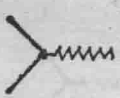
将费曼图中的动量标记为




(5-51)

它和(5-50)式中的对应关系为

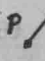
 $\dfrac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$，  $\dfrac{i}{\gamma\cdot p-m}$，

 $-ie\gamma_\mu$。 (5-53)

此外，再添加一个保证全过程能量、动量守恒的 $\delta$- 函数，一个回路积分，一个 $-\mathrm{Tr}$因子。

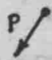
**费曼规则** 在以上的几个实例中，我们导出了 $S$ 矩阵元和费曼图的对应规则。这些对应规则，叫做费曼规则。现在，我们综合一下这些对应规则。

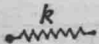
费曼图有三个组成部分：外线；内线；顶角。外线是一个端点固定，一个端点不固定的线段。在费米子的电磁作用中，有表示费米子产生的外线↗；表示费米子消灭的外线↗；表示反费米子产生的外线↙；表示反费米子消灭的外线↙；表示光子产生或消灭的外线〰。它们在 $S$ 矩阵元中的对应因子是



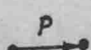
$\sqrt{\dfrac{m}{VE}}\,\bar{u}(p,s)$；

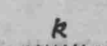

$\sqrt{\dfrac{m}{VE}}\,u(p,s)$；

 $\sqrt{\dfrac{m}{VE}}\,v(p,s)$,  $\sqrt{\dfrac{m}{VE}}\,\overline{V}(p,s)$;

 $\dfrac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$。 (5-54)

内线是两个端点都固定的线段，表示虚粒子产生随即消灭的过程，表示虚粒子的传播过程，故又称传播子。在费米子的电磁作用中，有费米子的传播子→，有光子的传播子⟿。它们在 $S$ 矩阵元中的对应因子是

 $\displaystyle\int\frac{d^4p}{(2\pi)}\,\frac{i}{\gamma\cdot p-m}$,

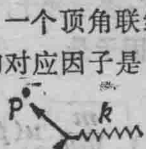
 $\displaystyle\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}$, (5-55)

动量积分，可以和顶角上的 $\delta$- 函数抵消。不能和 $\delta$- 函数抵消的动量积分，是回路积分。

顶角是联结线段的点。一个顶角联结几根什么线段，要由所取的理论确定。在费米子的电磁作用中，相互作用哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_i(x)=e\overline{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)A^{\mu}(x),$$

因而，一个顶角联结两根费米子线和一根光子线，其在 $S$ 矩阵元中的对应因子是

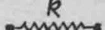
 $-ie\gamma_{\mu}(2\pi)^4\delta^4(p'-p-k)$。 (5-56)

它有三个部分：$e\gamma_\mu$ 由 $\mathscr{H}_i(x)$ 中去除场量 $\psi$、$\overline{\psi}$、$A^\mu$ 后得到；$-i$ 来自

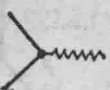
$$S^{(n)}=\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdot d^4x_n T\mathscr{H}_i(x_1)\cdots\mathscr{H}_i(x_n)$$

中的 $-i\mathscr{H}_i$；$(2\pi)^4\delta^4(\cdots)$ 保证在顶角上的能量、动量守恒。顶角上的 $\delta$- 函数，可以被内线的动量积分消除。不能消除的一个 $\delta$-函数，是保证整个过程能量、动量守恒所需要的。考虑到内线动量积分和顶角 $\delta$- 函数的对消，内线和顶角的费曼规则可以写成



$\dfrac{i}{\gamma\cdot p-m}$；


$\dfrac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}$；


$-ie\gamma_\mu$。 (5-57)

当然，在 $S$ 矩阵元中，必需添加保证整个过程能量、动量守恒的 $\delta$- 函数，和回路的动量积分。

对于费米子线，除上述对应规则外，还有几条规则：(1) 按费曼图根据上述规则写下 $S$ 矩阵元时，必需逆着费米子线的顺序进行；(2) 两个费曼图的差别，只在交换费米子线的位置时，两个矩阵元应该差一负号；(3) 一个闭合的费米子圈，在相应因子之前，要附加运算 $-\mathrm{Tr}$ 。

**康普顿散射**　前面，我们从几个实例导出了费曼规则。现在，我们以康普顿散射为例，论述如何根据给定的过程和给定的理论，画出费曼图，如何根据费曼图按照费曼规则，写出 $S$ 矩阵元。

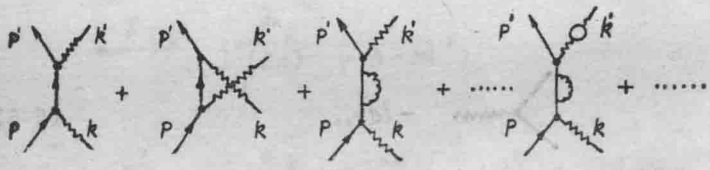
康普顿散射过程是

$$e^-(p,s)+\gamma(k,\lambda)\rightarrow e^-(p',s')+\gamma(k',\lambda')。$$

显然，它是电磁过程，相互作用哈密顿密度是

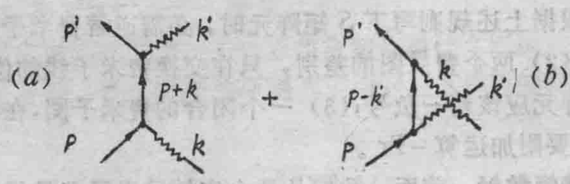
$$\mathscr{H}_i(x)=e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)。$$

确定的过程有确定的外线。康普顿散射的费曼图，有四根外线：一根动量为 $p'$ 的出射电子线；一根动量为 $k'$ 的出射光子线；一根动量为 $p$ 的入射电子线，一根动量为 $k$ 的入射光子线。对于电子的自旋和光子的极化，通常不在图中标出。确定的理论有确定的顶角形式。电磁相互作用，如上所述，有联结两根费米子线、一根光子线的顶角，而且顶角因子是 $-ie\gamma_\mu$。所以，康普顿散射的费曼图，是有四根外线、任一顶角都联结三根线的图形，如



其中，前两个图形是最低阶的。

在最低阶近似下，费曼图是



按照上述的费曼规则，写下与之相应的 $S$ 矩阵元是

$$S_{fi}^{(a)}=(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\sqrt{\frac{m}{VE'}}\,\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\mu)$$

$$\frac{i}{\gamma \cdot (p+k)-m}(-ie\gamma_\nu)\sqrt{\frac{m}{VE}}\,u(p,s)$$

$$\frac{e^\mu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\ \frac{e^\nu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}},$$

$$S_{fi}^{(b)}=(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\sqrt{\frac{m}{VE'}}\,\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\mu)$$

$$\frac{i}{\gamma \cdot (p-k')-m}(-ie\gamma_\nu)\sqrt{\frac{m}{VE}}\,u(p,s)$$

$$\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\ \frac{e^\nu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}。$$

两个图形的差别，仅仅是外光子线的交换。因而，$S$ 矩阵元应取二式之和，即

$$S_{fi}^{(2)}=S_{fi}^{(a)}+S_{fi}^{(b)}=(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE'}}\,\overline{u}(p',s')$$

$$\Big[-ie\gamma_\mu\frac{i}{\gamma \cdot (p+k)-m}(-ie\gamma_\nu)$$

$$-ie\gamma_\nu\frac{i}{\gamma \cdot (p-k')-m}(-ie\gamma_\mu)\Big]\cdot\sqrt{\frac{m}{VE}}\,u(p,s)$$

$$\frac{e^\mu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\ \frac{e^\nu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}。$$

## §4. 衰变寿命和碰撞截面

$S$ 矩阵元是过程的几率幅，$S$ 矩阵元的计算是过程几率计算的基础。在粒子物理中，需要计算的粒子过程，初态常常是一

个粒子或两个粒子。初态是一个粒子的过程，是自发衰变过程，需要计算的是衰变宽度或粒子寿命。初态是两个粒子的过程，是碰撞过程，需要计算的是碰撞截面。在这一节中，我们将介绍寿命和截面的定义、计算公式和一些有关内容。

**几率幅** $S$ 矩阵的作用，按定义，是使 $t=-\infty$ 时的初态 $|i>$，变成 $t=\infty$ 时的终态 $S|i>$。初态是纯态。终态 $S|i>$ 是混合态，可以展开为各种可能态的叠加

$$S|i>=\sum_f a_f|f>。\tag{5-58}$$

显然，$S$ 矩阵元

$$S_{fi}=<f|S|i>=a_f\tag{5-59}$$

就是在终态 $S|i>$ 中，出现状态 $|f>$ 的几率幅。

在 $S$ 矩阵中，如前所述，有 $S^{(0)}=1$ 不引起状态变化的部分。引起反应，引起状态变化的部分，实际上是

$$S=1+iR\tag{5-60}$$

中的 $R$。故把 $R$ 叫做反应矩阵。以上诸例中讨论的 $S$ 矩阵元 $S_{fi}$，实际上是反应矩阵元 $R_{fi}$。

$$R_{fi}=<f|R|i>\tag{5-61}$$

是由初态 $|i>$ 变化成终态 $|f>$ 的几率幅。

反应矩阵元 $R_{fi}$，由外线、内线、顶角相应的因子构成。每一外线有一运动学因子 $1/\sqrt{2V\omega}$ 或 $\sqrt{m/VE}$。设所论过程初态有 $n$ 个粒子，终态有 $m$ 个粒子，令

$$N_i=\sqrt{2\omega_i}\cdot\sqrt{E_i/m_i}\cdots;$$

$$N_f=\sqrt{2\omega_f}\cdot\sqrt{E_f/m_f}\cdots\tag{5-62}$$

分别是 $n$ 个初态粒子的运动学因子和 $m$ 个终态粒子的运动学因子。把这些运动学因子分列出来，就有

$$R_{fi}=\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_iN_fV^{n+m/2}}T_{fi}。\tag{5-63}$$

$\delta$- 函数是保证能量、动量守恒的。$T_{fi}$ 是动力学部分，由顶角

因子、传播子和外线的自旋、极化部分组成。由以上诸例可知，它们是洛仑兹标量，故称不变振幅。

**几率** $R_{fi}$ 是几率幅，其绝对值的平方

$$|R_{fi}|^2 = \frac{((2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f))^2}{N_i^2 N_f^2 V^{n+m}}|T_{fi}|^2 \tag{5-64}$$

就是几率。过程经历的时间 $T\to\infty$ 。这个几率，就是在整个过程中的几率，应该是与过程经历的时间成比例的。所以，有确定意义的应该是单位时间内的几率，即

$$\frac{|R_{fi}|^2}{T} = \frac{((2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f))^2}{TN_i^2 N_f^2 V^{n+m}}|T_{fi}|^2。 \tag{5-65}$$

另一方面，一个 $\delta$- 函数是保证能量、动量所必需的。而 $\delta$- 函数的平方，却是没有意义的，有待处理。我们知道，$\delta$- 函数可以表示为

$$2\pi\delta(E_f - E_i) = \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\exp[-i(E_f - E_i)t)dt$$

$$(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = \lim_{V\to\infty}\int_V \exp[i(\vec{p}_f - \vec{p}_i)\cdot\vec{x}]d^3x,$$

$\delta$- 函数的平方就可以表示为

$$(2\pi\delta(E_f - E_i))^2 = (2\pi\delta(E_f - E_i)2\pi\delta(0)$$
$$= 2\pi\delta(E_f - E_i)T,$$
$$((2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i))^2 = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i)(2\pi)^3\delta^3(0)$$
$$= (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i)V,$$
$$((2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i))^2 = (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)(2\pi)^4\delta^4(0)$$
$$= (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)TV。$$

因此，单位时间内的几率，就是

$$\frac{|R_{fi}|^2}{T} = \frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)}{N_i^2 N_f^2 V^{n+m-1}}|T_{fi}|^2。 \tag{5-66}$$

上式中，初、终态粒子的能量、动量、自旋和极化都是确定的。通

常，粒子的自旋、极化都是不确定的，有各种可能取值，实验不予区分。这时，就需要对初态粒子的自旋、极化求平均，对终态粒子的自旋、极化求和。我们用符号$\overline{\sum}$表示这种运算。(5-66)式就要写成

$$\overline{\sum}\frac{|R_{fi}|^2}{T}=\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_i^2N_f^2V^{n+m-1}}\overline{\sum}|T_{fi}|^2。\qquad(5\text{-}67)$$

实验上，常常使初态粒子的能量、动量取确定的数值，而终态粒子的能量、动量可取各种可能值。这时，就要对终态粒子的动量求和，几率表式(5-67)就成为

$$\sum_{\vec{k}_f}\overline{\sum}\frac{|R_{fi}|^2}{T}=\sum_{\vec{k}_f}\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_i^2N_f^2V^{n+m-1}}\overline{\sum}|T_{fi}|^2。\qquad(5\text{-}68)$$

上式中的规一化体积$V$，是无法给定的，需要处理。在箱规一化条件下，边界条件是周期性的，粒子的动量取不连续的值。这正是(5-68)式中既出现规一化体积$V$、又对动量求和的原因。如果放弃周期边界条件，就可以去除规一化体积，动量就会是连续的。这时，终态粒子的动量，就会连续分布。在规一化体积$V$中，动量在$\vec{k}_f\to\vec{k}_f+d\vec{k}_f$之间，相应的相空间的体积是$Vd^3k_f$。每一个相格的大小是$h^3$。$h$是普朗克常数，$h=2\pi\hbar$。取自然单位时，$\hbar=1$，$h=2\pi$，每个相格的大小为$h^3=(2\pi)^3$。相体积$Vd^3k_f$中的相格数为

$$\frac{Vd^3k_f}{(2\pi)^3}。\qquad(5\text{-}69)$$

过程发生的几率，是和相格数成比例的。因此，终态粒子动量，在$\vec{k}_f\to\vec{k}_f+d\vec{k}_f$之间的几率为

$$\overline{\sum}\frac{|R_{fi}|^2}{T}\prod_f\frac{Vd^3k_f}{(2\pi)^3}$$

$$=\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_i^2N_f^2V^{n-1}}\overline{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}。\tag{5-70}$$

这样就消除了终态粒子的规一化体积 $V^m$。对于终态粒子取所有可能动量值的几率，就是

$$\int\overline{\sum}\frac{|R_{fi}|^2}{T}\prod_f\frac{Vd^3k_f}{(2\pi)^3}$$

$$=\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_i^2N_f^2V^{n-1}}\overline{\sum}|T_{fi}|^2\prod\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}。\tag{5-71}$$

**寿命** 一个粒子自发地衰变为 $m$ 个粒子的过程，是衰变过程。这时，$n=1$。该过程的几率，就是该粒子相对于该过程的衰变宽度。其倒数，就是该粒子相对于该过程的寿命，由(5-71)式知，它是

$$\frac{1}{\tau}=\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_i^2N_f^2}\overline{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}。\tag{5-72}$$

**截面** 两个粒子碰撞成为 $m$ 个粒子的过程，是碰撞过程。初态有两个粒子，$n=2$。过程的几率，和两个粒子的相对速度有关。实验上，常常是用入射粒子束进行实验。过程几率，和束流密度成比例。流密度的定义是

$$J=\rho|\vec{v}|,\tag{5-73}$$

$\rho$ 是入射粒子的密度。在规一化体积 $V$ 中，只有一个粒子

$$\rho=\frac{1}{V}。\tag{5-74}$$

$\vec{v}$ 是两个粒子的相对速度。在相对论理论中

$$\vec{p}=m\vec{v},\qquad E=mc^2,$$

在自然单位中，$c=1$，

$$\vec{v}=\frac{\vec{p}}{E}。$$

在实验室坐标系中，靶粒子不动，相对速度就是入射粒子的

速度

$$\vec{V}=\frac{\vec{p}}{E}. \tag{5-75}$$

$E$、$\vec{p}$ 是入射粒子的能量和动量。在质心系中，相对速度

$$\vec{V}=\frac{\vec{p}}{E}+\frac{\vec{p}}{E'}。 \tag{5-76}$$

在任意坐标系中，

$$J=\frac{\sqrt{(p\cdot p')^2-p^2p'^2}}{VEE'}。 \tag{5-77}$$

$E$、$p$ 是入射粒子的能量和四维动量，$E'$、$p'$ 是另一粒子的能量和四维动量。

在(5-70)式、(5-71) 式中，令 $n=2$，就是单位时间内的碰撞几率。实验表明，它和 (5-73) 式、(5-77) 式表示的流密度成正比。因此，我们定义碰撞截面为

$$d\sigma\sim\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_i^2N_f^2JV}\overline{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}, \tag{5-78}$$

$$\sigma=\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_i^2N_f^2JV}\overline{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}。$$

它们有面积的量纲，而且是相对论不变的。

## §5. γ 矩阵的求迹定理

如以上列举的诸例所示，在涉及费米粒子过程的 $S$ 矩阵元中，都有 $\overline{u}\Gamma u$ 或 $\overline{u}\Gamma v$ 或 $\overline{v}\Gamma v$ 形式的因子。$\Gamma$ 是 $\gamma$ 矩阵的乘积。当计算寿命或截面时，对自旋平均或求和，就要计算 $\sum|\overline{u}\Gamma v|^2$ 之类的因子。它们是

$$\overline{\sum}|\overline{u}\Gamma v| = \sum_{s,\tau}\overline{u}(p,s)\Gamma v(q,\tau)$$

$$\overline{v}(q,\tau)\gamma_0\Gamma^+\gamma_0 u(p,s)$$

$$= \mathrm{Tr}\sum_s u(p,s)\overline{u}(p,s)\Gamma\sum_\tau v(q,\tau)\overline{v}(q,\tau)\gamma_0\Gamma^+\gamma_0$$

$$= \mathrm{Tr}\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}\Gamma\frac{\gamma\cdot q-m'}{2m'}\gamma_0\Gamma^+\gamma_0。$$

因此,在实际问题的计算中,常常碰到诸如此类的$\gamma$矩阵乘积的求迹问题。

关于$\gamma$矩阵乘积求迹的计算，人们归纳出如下几条定理。应用这些定理,可以简便地算出结果。

**定理一** 奇数个$\gamma$矩阵乘积的迹等于零。

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu1}\gamma_{\mu2}\cdots\gamma_{\mu n})=0,\quad n=奇数 \tag{5-79}$$

定理的证明是简便的。由于 $\gamma_5^2=1$ ,$\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA$,

$\gamma_5\gamma_\mu=-\gamma_\mu\gamma_5$ ,所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu1}\gamma_{\mu2}\cdots\gamma_{\mu n}) &= \mathrm{Tr}(\gamma_{\mu1}\gamma_{\mu2}\cdots\gamma_{\mu n}\gamma_5^2)\\ &= \mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu1}\gamma_{\mu2}\cdots\gamma_{\mu n}\gamma_5)\\ &= -\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu1}\gamma_{\mu2}\cdots\gamma_{\mu n}\gamma_5^2)\\ &= -\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu1}\gamma_{\mu2}\cdots\gamma_{\mu n})=0。\end{aligned}$$

$\gamma$矩阵的乘积,不是偶数个$\gamma$矩阵的乘积,就是奇数个$\gamma$矩阵的乘积。这定理,使我们的计算工作量减少了一半,需要求迹的,只是偶数个$\gamma$矩阵的乘积了。

**定理二** 只有成对出现的$\gamma$矩阵乘积的迹才不为零。

$$\mathrm{Tr}I=4,$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4g_{\mu\nu},$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho)=4(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu1}\gamma_{\mu2}\cdots\gamma_{\mu n}) &= g_{\mu1\mu2}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu3}\gamma_{\mu4}\cdots\gamma_{\mu n})\\ &\quad -g_{\mu1\mu3}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu2}\gamma_{\mu4}\cdots\gamma_{\mu n})\\ &\quad +g_{\mu1\mu4}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu2}\gamma_{\mu3}\gamma_{\mu5}\cdots\gamma_{\mu n})\\ &\quad -\cdots\cdots\end{aligned} \tag{5-80}$$

$$+g_{\mu 1\mu n}\text{Tr}(\gamma_{\mu 2}\gamma_{\mu 3}\cdots\gamma_{\mu n-1}),$$

定理的证明也是简便的。$I$是$4\times 4$单位矩阵，$\text{Tr}I=4$是显然的。由于$\text{Tr}AB=\text{Tr}BA$,故

$$\text{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu=\text{Tr}\gamma_\nu\gamma_\mu=\text{Tr}\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)$$
$$=g_{\mu\nu}\text{Tr}I=4g_{\mu\nu}。$$

上式中利用了$\gamma$矩阵的基本对易关系$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu}$。再利用这个关系,就得到

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}\gamma_{\mu 1}\gamma_{\mu 2}\cdots\gamma_{\mu n}\\
&=\text{Tr}(2g_{\mu 1\mu 2}-\gamma_{\mu 2}\gamma_{\mu 1})\gamma_{\mu 3}\cdots\gamma_{\mu n}\\
&=2g_{\mu 1\mu 2}\text{Tr}\gamma_{\mu 3}\cdots\gamma_{\mu n}-\text{Tr}\gamma_{\mu 2}\gamma_{\mu 1}\gamma_{\mu 3}\cdots\gamma_{\mu n}\\
&=2g_{\mu 1\mu 2}\text{Tr}\gamma_{\mu 3}\cdots\gamma_{\mu n}-\text{Tr}\gamma_{\mu 2}(2g_{\mu 1\mu 3}-\gamma_{\mu 3}\gamma_{\mu 1})\gamma_{\mu 4}\cdots\gamma_{\mu n}\\
&=2g_{\mu 1\mu 2}\text{Tr}\gamma_{\mu 3}\cdots\gamma_{\mu n}-2g_{\mu 1\mu 3}\text{Tr}\gamma_{\mu 2}\gamma_{\mu 4}\cdots\gamma_{\mu n}\\
&\quad+\text{Tr}\gamma_{\mu 2}\gamma_{\mu 3}\gamma_{\mu 1}\gamma_{\mu 4}\cdots\gamma_{\mu n}\\
&=2g_{\mu 1\mu 2}\text{Tr}\gamma_{\mu 3}\cdots\gamma_{\mu n}-2g_{\mu 1\mu 3}\text{Tr}\gamma_{\mu 2}\gamma_{\mu 4}\cdots\gamma_{\mu n}+\cdots\\
&\quad\cdots+2g_{\mu 1\mu n}\text{Tr}\gamma_{\mu 2}\cdots\gamma_{\mu n-1}-\text{Tr}\gamma_{\mu 2}\cdots\gamma_{\mu n}\gamma_{\mu 1}。
\end{aligned}$$

整理一下，就是定理二中的后一个等式。它使$n$个$\gamma$矩阵乘积求迹的问题,化简成$n-2$个$\gamma$矩阵乘积求迹的问题。

**定理三** 含有$\gamma_5$的矩阵乘积的迹。

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}\gamma_5=0,\\
&\text{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu=0, \qquad (5\text{-}81)\\
&\text{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho=-i4e_{\mu\nu\lambda\rho}。
\end{aligned}$$

$\gamma_5$的定义为

$$\gamma_5=-i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

根据定理二，只有两两成对的$\gamma$矩阵乘积的迹才不为零，且为$\pm 4$,就可以推知上述定理。

**定理四** 矩阵乘积的迹等于矩阵逆序乘积的迹。

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu 1}\gamma_{\mu 2}\cdots\gamma_{\mu n})=\text{Tr}(\gamma_{\mu n}\cdots\gamma_{\mu 2}\gamma_{\mu 1}), \qquad (5\text{-}82)$$

利用电荷共轭矩阵$C$, $C\gamma_\mu C^{-1}=-\widetilde{\gamma}_\mu$和$\text{Tr}\,\widetilde{A}=\text{Tr}A$,推知

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu 1}\gamma_{\mu 2}\cdots\gamma_{\mu n})\\
&=\mathrm{Tr}(C\gamma_{\mu 1}C^{-1}C\gamma_{\mu 2}C^{-1}\cdots C\gamma_{\mu n}C^{-1})\\
&=\mathrm{Tr}(\tilde{\gamma}_{\mu 1}\tilde{\gamma}_{\mu 2}\cdots\tilde{\gamma}_{\mu n})\\
&=\mathrm{Tr}(\widetilde{\tilde{\gamma}_{\mu 1}\tilde{\gamma}_{\mu 2}\cdots\tilde{\gamma}_{\mu n}})\\
&=\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu n}\cdots\gamma_{\mu 2}\gamma_{\mu 1})。
\end{aligned}$$

**定理五** $\gamma$ 矩阵的乘积，有时以 $\gamma_\mu\Gamma\gamma^\mu$ 的形式出现，$\mu=0$，1，2，3 取和。根据 $\gamma$ 矩阵的基本对易关系，可以化简为 $\Gamma'$ 的形式，即使 $n$ 个 $\gamma$ 矩阵的乘积成为 $n-2$ 个 $\gamma$ 矩阵的乘积。具体内容有

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma_\mu=4,\\
&\gamma_\mu a\cdot\gamma\gamma^\mu=-2a\cdot\gamma,\\
&\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma\gamma^\mu=4a\cdot b \qquad (5\text{-}83)\\
&\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma c\cdot\gamma\gamma^\mu=-2c\cdot\gamma b\cdot\gamma a\cdot\gamma,\\
&\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma c\cdot\gamma d\cdot\gamma\gamma^\mu\\
&\quad=2(d\cdot\gamma a\cdot\gamma b\cdot\gamma c\cdot\gamma+c\cdot\gamma b\cdot\gamma a\cdot\gamma d\cdot\gamma),
\end{aligned}$$

第一式是显然的。第二式为

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu a\cdot\gamma\gamma^\mu&=a_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu=a_\nu\gamma_\mu(2g^{\nu\mu}-\gamma^\mu\gamma^\nu)\\
&=2a\cdot\gamma-4a\cdot\gamma=-2a\cdot\gamma。
\end{aligned}$$

其余诸式的证明，都可以这样进行。

## 习 题 五

1．已知：海森堡表象中的运动方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,\Big|\,a>^h=0,\ \dot{A}^h=i[H^h,A^h],$$

由海森堡表象变换到相互作用表象的幺正算符为

$$u=\exp(iH_0^ht)\exp(-iH^ht),\ H=H_0+Hi,$$

证明：相互作用表象中的运动方程是

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left| a>^{I}=H_{i}^{I}\right| a>^{I},A^{I}=i[H_{0}^{I},A^{I}]。$$

2。证明：

$$\int_{0}^{t}dt_{1}\int_{0}^{t_1}dt_{2}\int_{0}^{t_2}dt_{3}H_{i}(t_{1})H_{i}(t_{2})H_{i}(t_{3})$$

$$=\frac{1}{3!}\int_{0}^{t}dt_{1}\int_{0}^{t}dt_{2}\int_{0}^{t}dt_{3}TH_{i}(t_{1})H_{i}(t_{2})H_{i}(t_{3})。$$

3。写出在四阶近似下，康普顿效应 $\gamma+e^{-}\to\gamma+e^{-}$ 的费曼图和 $S$ 矩阵元。

4。已知 $\pi-N$ 相互作用的哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_{i}=g\overline{N}\gamma_{5}\vec{\tau}N\cdot\vec{\phi},$$

写出与该理论相应的费曼规则。

5。写出在最低阶近似下，$\pi-\pi$ 散射 $\pi+\pi\to\pi+\pi$ 的费曼图和 $S$ 矩阵元。

6。证明：$\gamma_{\mu}a\cdot\gamma b\cdot\gamma\gamma^{\mu}=4a\cdot b$。

7。计算：

$$\mathrm{Tr}\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}\gamma_{\mu}(1+\gamma_{5})\frac{\gamma\cdot q-m'}{2m'}\gamma_{0}\gamma^{\mu+}(1+\gamma_{5})\gamma_{0}。$$

# 第六章 树图近似

现在，我们用上一章论述的微扰理论，来计算一些具体过程，阐明应用微扰理论的方法和步骤。在这一章里，我们取最低阶近似，而且是树图近似。所谓树图，是在其费曼图中没有闭合圈。含有闭合圈的费曼图叫圈图。圈图的计算结果，总含有发散因子，需要用重正化方法进行处理，我们将在下一章中讨论。

## §1. 电子对湮灭为μ子对或强子

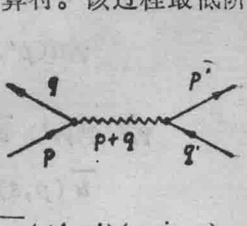
电子对碰机，是一种重要的高能加速器。在电子对碰机上，发生的过程是多种多样的。其中，有电子对湮灭为$\mu$介子的过程，电子对湮灭为强子的过程。电子对湮灭为$\mu$介子对的过程是

$$e^-(p,s)+e^+(q,\tau)\to\mu^-(p',s')+\mu^+(q',\tau'),$$

它们是由电磁作用决定的。相互作用哈密度是

$$\mathscr{H}_I(x)=e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)+e\overline{\psi'}(x)\gamma_\mu\psi'(x)A^\mu(x),$$

$\psi(x)$、$\psi'(x)$分别是电子场算符和介子场算符。该过程最低阶近似的费曼图如右图所示。电子对先湮灭为光子，然后再形成$\mu$子对。按照上章所述的费曼规则，如(5-54)式、(5-57)式所示，相应的$S$矩阵元为




$$S^{(2)}_{e\mu}=(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\sqrt{\frac{m_\mu}{VE_\mu}}\,\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_\mu)$$

$$\sqrt{\frac{m_\mu}{VE'_\mu}}\,v(q',\tau')\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{(p+q)^2}\sqrt{\frac{m}{VE'}}\,\overline{v}(q,\tau)(-ie\gamma_\nu)$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)。\qquad (6\text{-}1)$$

**碰撞截面** 需要计算的是过程的碰撞截面。为此，先要定出它的相对流密度。在质心系中，相对流密度是

$$J=\rho|\vec{v}|=\frac{1}{V}\left(\frac{|\vec{p}|}{E}+\frac{|\vec{p'}|}{E'}\right)=\frac{2|\vec{p}|}{VE}；\qquad (6\text{-}2)$$

将(6-1)式、(6-2)式代入(5-78)式中，得

$$\sigma=\int(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\frac{m^2m_\mu^2}{2|\vec{p}|EE_\mu E_{\mu'}}\frac{1}{(p+q)^4}$$

$$\overline{\sum}|\overline{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\overline{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)|^2$$

$$\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}。\qquad (6\text{-}3)$$

**自旋均和** 进入电子对碰机的电子对，通常是非极化的，应对两种可能的自旋取向求平均。对于产生的 $\mu$ 介子对，也不测量它们的极化，应对两种可能的自旋取向求和。要算出(6-3)式，就要计算粒子的自旋的平均和求和。

$$\overline{\sum}|\ \ |^2=\frac{1}{2}\sum_s\frac{1}{2}\sum_\tau\sum_{s',\tau'}\overline{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\overline{v}(q,\tau)$$

$$\gamma^\mu u(p,s)\overline{u}(p,s)\gamma_0\gamma^{\nu+}\gamma_0 v(q,\tau)\overline{v}(q'\tau')\gamma_0\gamma_\nu^+$$

$$\gamma_0 u(p',s')=\frac{1}{2}\sum_s\frac{1}{2}\sum_\tau\sum_{s',\tau'}\overline{u}(p',s')$$

$$\gamma_\mu v(q',\tau')\ \overline{v}(q',\tau')\gamma_\nu u(p',s')\overline{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)$$

$$\overline{u}(p,s)\gamma^\nu v(q,\tau)=\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\sum_{s'}u(p',s')$$

$$\overline{u}(p',s')\gamma_\mu\sum_{\tau'}v(q',\tau')\overline{v}(q',\tau')\gamma_\nu)\mathrm{Tr}\sum_{\tau}$$

$$\left(v(q,\tau)\overline{v}(q,\tau)\gamma^\mu\sum_s u(p,s)\overline{u}(p,s)\gamma^\nu\right)$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\frac{\gamma\cdot p'+m_\mu}{2m_\mu}\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot q'-m_\mu}{2m_\mu}\gamma_\nu\right)$$

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\gamma\cdot q-m}{2m}\gamma^\mu\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}\gamma^\nu\right)$$

$$= \frac{1}{64m^2m_\mu^2}\mathrm{Tr}[(\gamma\cdot p'+m_\mu)\gamma_\mu(\gamma\cdot q'-m_\mu)\gamma_\nu]$$

$$\mathrm{Tr}[(\gamma\cdot q-m)\gamma^\mu(\gamma\cdot p+m)\gamma^\nu]$$

$$= \frac{1}{64m^2m_\mu^2}\mathrm{Tr}[\gamma\cdot p'\gamma_\mu\gamma\cdot q'\gamma_\nu - m_\mu^2\gamma_\mu\gamma_\nu]$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma\cdot q\gamma^\mu\gamma\cdot p\gamma^\nu - m^2\gamma^\mu\gamma^\nu]$$

$$= \frac{1}{64m^2m_\mu^2}4[p'_\mu q'_\nu - g_{\mu\nu}p'\cdot q' + q'_\mu p'_\nu - g_{\mu\nu}m_\mu^2]$$

$$4[q^\mu p^\nu - g^\mu q^\nu\cdot p + p^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}m^2]$$

$$= \frac{1}{2m^2m_\mu^2}[2m^2m_\mu^2 + m_\mu^2 p\cdot q + m^2p'\cdot q'$$

$$+(p\cdot p')(q\cdot q') + (p\cdot q')(q\cdot p')]。$$

在电子对碰机中，能量是很高的，$m^2, m_\mu^2 \ll |\vec{p}|^2, |\vec{p'}|^2$。因而，质量相对于能量、动量，可以略去不计，上式成为

$$\overline{\sum}|\ |^2 = \frac{1}{2m^2m_\mu^2}[(p\cdot p')(q\cdot q') + (p\cdot q')(q\cdot p')]。$$

根据能量、动量守恒

$$p+q = p'+q',$$
$$(p+q)^2 = 2m^2+2p\cdot q = (p'+q')^2 = 2m_\mu^2 + 2p'\cdot q',$$
$$(p-p')^2 = (q'-q)^2,$$
$$m^2+m_\mu^2-2p\cdot p' = m^2+m_\mu^2-2q\cdot q',$$
$$(p-q')^2 = (p'-q)^2,$$
$$m^2+m_\mu^2-2p\cdot q' = m^2+m_\mu^2-2q\cdot p',$$
$$p\cdot p' = q\cdot q', \qquad p\cdot q' = q\cdot p',$$

代入上式，得

$$\overline{\sum}|\ \ |^2=\frac{1}{2m^2m_\mu^2}[(p\cdot p')^2+(p\cdot q')^2]。$$

在质心系中

$$\begin{aligned}(p\cdot p')^2+(p\cdot q')^2&=(EE_\mu-\vec{p}\cdot\vec{p'})^2+(EE_\mu+\vec{p}\cdot\vec{p'})^2\\&=E^2E_\mu^2(1-\cos\theta)^2+E^2E_\mu^2(1+\cos\theta)^2\\&=2E^2E_\mu^2(1+\cos^2\theta),\end{aligned}$$

$\theta$ 是电子动量 $\vec{p}$ 和 $\mu^-$ 子动量 $\vec{p'}$ 之间的夹角。代入上式，得

$$\overline{\sum}|\ \ |^2=\frac{E^2E_\mu^2}{m^2m_\mu^2}(1+\cos^2\theta)。\tag{6-4}$$

再者，在质心系中

$$(p+q)^2=(E+E')^2-(\vec{p}+\vec{q})^2=4E^2,\tag{6-5}$$

把(6-4)式、(6-5)式代入(6-3)式中，得

$$\sigma=e^4\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')}{32E^4}(1+\cos^2\theta)\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}。\tag{6-6}$$

**终态积分** (6-6)式表示的是六重积分。但有4个 $\delta$-函数，抵消后，实际上只有两重积分。$d^3p'$ 可以用来抵消动量守恒的 $\delta^3(\vec{p}+\vec{q}-\vec{p'}-\vec{q'})$。余下的 $\delta(E+E'-E_\mu-E'_\mu)$，要用

$$\begin{aligned}dE_f=d(E_\mu+E'_\mu)&\approx d(|\vec{p'}|+|\vec{q'}|)\\&=d\,2|\vec{q'}|=2d|\vec{q'}|\end{aligned}$$

去除。实际上，对 $\vec{q'}$ 取球坐标

$$d^3q'=\vec{q'}^2d|\vec{q'}|d\Omega=\frac{1}{2}\vec{q'}^2dE_fd\Omega=\frac{1}{2}E^2dE_fd\Omega,\tag{6-7}$$

代入(6-6)式，得

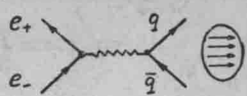
$$\sigma_{e\mu} = \frac{e^4}{(2\pi)^2}\int \frac{1+\cos^2\theta}{64E^2}d\Omega = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}, \tag{6-8}$$

$\alpha = e^2/4\pi$ 是精细结构常数。

**湮灭为强子** 电子对不仅可以湮灭为 $\mu$ 子对，在能量足够高时，还可以湮灭为强子。从现在的观点看来，强子是由夸克构成的；构成强子的夸克，由于目前还不清楚的某种原因，只能禁闭在强子之中，不能自由存在。因此，电子对湮灭为强子的过程，可以理解为：电子对先湮灭为光子，光子形成夸克对，然后夸克对以百分之百的几率变成强子，即

$$e^- + e^+ \to \gamma \to q + \overline{q} \to \text{强子},$$

相应的费曼图如右图所示。促成这一过程的哈密顿密度是




$$\mathscr{H}_i(x) = e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)$$

$$+ eQ_j\overline{q}_j(x)\gamma_\mu q_j(x)A^\mu(x)。 \tag{6-9}$$

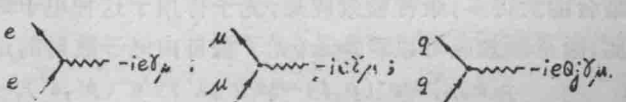
$q_j(x)$ 是味道为 $j$ 的夸克的场算符，$Q_j$ 是它的电荷数。当然，夸克对形成强子的作用是强作用。认为它的几率是百分之百时，就不区分什么强子，就不必过问过程的细节。因此，在实际计算中，只需要计算电子对湮灭为夸克对的几率就足够了。

电子对湮灭为夸克对，和电子对湮灭为 $\mu$ 子对一样，是电磁过程。它们和电磁场的相互作用哈密顿密度是

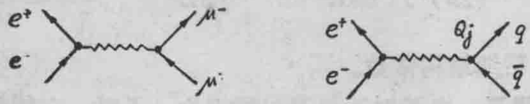
$$\mathscr{H}_i(x) = e\overline{e}(x)\gamma_\mu e(x)A^\mu(x) + e\overline{\mu}(x)\gamma_\nu\mu(x)A^\nu(x)$$

$$+ eQ_j\overline{q}(x)\gamma_\mu q(x)A^\mu(x),$$

它们有同样的顶角。由于电子、$\mu$ 介子都有电荷 $e$，而夸克的电荷是 $Q_je$，因而顶角因子的差别是 $1 \rightleftarrows Q_j$，



在最低阶近似下，其费曼图是




唯一的差别，是在一个顶角上，以$Q_j$代替1。所以，在(6-8)式中，作代换$e^4 \to e^2(eQ_j)^2$，$\alpha^2 \to \alpha^2 Q_j^2$，就得到电子对湮灭为夸克对的截面为

$$\sigma_{eqj} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} Q_j^2。$$

电子对湮灭为各种可能夸克对，然后以百分之百的几率变成各种可能强子，即电子对湮灭为各种可能强子的截面为

$$\sigma_{强子} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} C \sum_j Q_j^2。$$

$C$是夸克的颜色数。通常认为$C=3$。

电子对湮灭为强子的几率，和电子对湮灭为$\mu$子对的几率之比，为

$$R = \frac{\sigma_{强子}}{\sigma_\mu} = C \sum_j Q_j^2。\tag{6-10}$$

这公式在确定夸克的颜色自由度中，起过历史的作用。

## §2. 康普顿效应

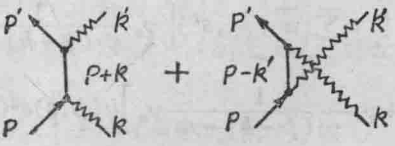
$\gamma$光子经物质散射后，变成频率不同的光子。这种现象叫做康普顿效应。这是一种量子效应，经典的电磁场理论是解释不了的。从粒子物理的观点看来，$\gamma$光子的能量，比原子中电子的结合能大得多，康普顿效应是$\gamma$光子作用于这种电子的结果。因此，康普顿效应可以看作是$\gamma$光子被自由电子散射的过程

$$\gamma(k,\lambda) + e^-(p,s) \to \gamma(k',\lambda') + e^-(p',s')。$$

该过程是电磁过程，相互作用哈密顿密度是

$$\mathscr{H}_i(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

最低阶近似的费曼图是




相应的 $S$ 矩阵元是

$$S^{(2)}_{\gamma e} = (2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\sqrt{\frac{m}{VE'}}\,\bar{u}(p',s')(-ie\gamma_\mu)$$

$$\left[\frac{e^\mu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\ \frac{i}{\gamma\cdot(p+k)-m}\ \frac{e^\nu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}} + \frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\right.$$

$$\left.\frac{i}{\gamma\cdot(p-k')-m}\ \frac{e^\nu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\right](-ie\gamma_\nu)\sqrt{\frac{m}{VE}}\,u(p,s),$$

$$S^{(2)}_{\gamma e} = \frac{e^2m(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')}{2V^2\sqrt{EE'\omega\omega'}}\,\bar{u}(p',s')$$

$$\left[\gamma_\mu\frac{i}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu + \gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]$$

$$u(p,s)e^\mu(k',\lambda')e^\nu(k,\lambda)。$$

**散射截面**　在实验室坐标系中，电子不动，$p=(m,\vec{o})$；光子速度 $c=1$；入射光子的流密度

$$J=\rho|\vec{v}| = \frac{1}{V}c = \frac{1}{V},$$

散射截面为

$$\sigma = \int\frac{\overline{\sum}|S^{(2)}_{\gamma e}|^2}{JT}\ \frac{V^2d^3p'd^3k'}{(2\pi)6}$$

$$=\int \frac{e^4 m(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')}{4E'\omega\omega'}\overline{\sum}|\cdots|^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}$$

$$\frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{6-11}$$

$$\overline{\sum}|\cdots|^2=\overline{\sum}|\overline{u}(p',s')\Big[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu$$

$$+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k)-m}\gamma_\mu\Big]u(p,s)e^\mu(k',\lambda')$$

$$e^\nu(k,\lambda)|^2。$$

$\overline{\sum}$表示对初态粒子的极化、自旋求平均，对终态粒子的极化、自旋求和。

**极化均和** 在实验中，入射光子是非极化的，也不测量出射光子的极化。因此，在计算中，就要对入射光子的极化求平均，对出射光子的极化求和，即需要计算

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'}\cdots|^2=\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'}|\overline{u}(p',s')\Big[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\mu$$

$$+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\Big]u(p,s)e^\mu(k',\lambda')e^\nu(k,\lambda)|^2。 \tag{6-12}$$

一般地说，在需要计算极化均和的问题中，都要求计算

$$\sum_{\lambda=1}^{2}|L^\mu e_\mu(k,\lambda)|^2=\sum_{\lambda=1}^{2}L^{*\mu}L^\nu e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k,\lambda)。 \tag{6-13}$$

在电磁作用中，由于规范不变性、电流守恒，上述计算可以简化。

电磁作用的哈密顿密度，在时空空间为

$$\mathscr{H}_i(x)=e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)=ej_\mu(x)A^\mu(x),$$

在动量空间，有相应的形式

$$L^\mu(k)e_\mu(k,\lambda), \tag{6-14}$$

会出现在$S$矩阵元中。电荷守恒要求

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0 \quad \to \quad k_\mu L^\mu(k)=0。$$

另一方面,在规范变换下,

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu \Lambda(x),$$

$$e_\mu(k,\lambda)\to e'_\mu(k,\lambda)=e_\mu(k,\lambda)+k_\mu,$$

$$L^\mu(k)e_\mu(k,\lambda)\to L^\mu(k)e'_\mu(k,\lambda)=L^\mu(k)(e_\mu(k,\lambda)+k_\mu),$$

规范不变性要求

$$L^\mu(k)e'_\mu(k,\lambda)=L^\mu(k)e_\mu(k,\lambda),$$

$$k_\mu L^\mu(k)=0。\tag{6-15}$$

总之,从规范不变,电荷守恒推测,都有(6-15)式。

实际上,在(6-12)式中出现的

$$L_{\mu\nu}(k,k')=\overline{u}(p',s')\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu\right.$$

$$\left.+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]u(p,s)$$

也满足(6-14)式。例如

$$k^\nu L_{\mu\nu}(k,k')=\overline{u}(p',s')\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma\cdot k\right.$$

$$\left.+\gamma\cdot k\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]u(p,s),$$

把

$$(\gamma\cdot p-m)u(p,s)=0$$

加于上式中的第一项,使上式成为

$$k^\nu L_{\mu\nu}(k,k')=\overline{u}(p',s')\left[\gamma_\mu+\gamma\cdot k\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]$$

$$u(p,s),$$

考虑到

$$k=p'+k'-p, \qquad \overline{u}(p',s')(\gamma\cdot p'-m)=0,$$

$$\overline{u}(p',s')\gamma\cdot k=\overline{u}(p',s')\gamma\cdot(p'+k'-p)$$

$$=-\overline{u}(p',s')(\gamma\cdot(p-k')-m),$$

上式就是

$$k^{\nu}L_{\mu\nu}(k,k')=\overline{u}(p',s')[\gamma_{\mu}-\gamma_{\mu}]u(p,s)=0。$$

这表明:康普顿散射也满足(6-15)式的条件。

光子的极化矢量,如(1-127)式、(1-128)式、(1-130)式所示,

$$e^{\mu}(k,1)=(0,\vec{\varepsilon}(k,1)),$$

$$e^{\mu}(k,2)=(0,\vec{\varepsilon}(k,2)),$$

$$e^{\mu}(k,3)=\frac{k^{\mu}-\eta^{\mu}(k,\eta)}{k\cdot\eta},$$

$$e^{\mu}(k,4)=i\eta^{\mu},$$

$\vec{\varepsilon}(k,1)$、$\vec{\varepsilon}(k,2)$是相互正交的横极化矢量,$\eta^{\mu}=(1,\vec{0})$只有时间分量。四个四维极化矢量,是相互正交的完备系,

$$e^{\mu}(k,\lambda)e_{\mu}(k,\lambda')=-\delta_{\lambda,\lambda'},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{4}e_{\mu}(k,\lambda)e_{\nu}(k,\lambda)=-g_{\mu\nu}。$$

只对横向极化的求和是

$$\sum_{\lambda=1}^{2}e_{\mu}(k,\lambda)e_{\nu}(k,\lambda)=-g_{\mu\nu}-\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k\cdot\eta)^2}+\frac{k_{\mu}\eta_{\nu}+\eta_{\mu}k_{\nu}}{k\cdot\eta}。\tag{6-16}$$

把(6-15)式、(6-16)式代入(6-13)式,就得到

$$\sum_{\lambda=1}^{2}|L^{\mu}e_{\mu}(k,\lambda)|^2=-L^{*\mu}L^{\nu}g_{\mu\nu}=-|L|^2。\tag{6-17}$$

利用这个公式,就可以大大简化极化求和的计算。对横向极化求和的结果是,去除极化矢量,加一负号。因此,(6-12)式就等于

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'}|\cdots|^2=\frac{1}{2}\left|\overline{u}(p',s')\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]u(p,s)\right|^2,$$

(6-11)式表示的截面中，需要计算的是

$$\overline{\sum}|\cdots|^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_s\cdot\sum_{s'}\left|\overline{u}(p',s')\right.$$

$$\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]$$

$$\left.u(p,s)\right|^2。\tag{6-18}$$

**自旋均和** 物质中的电子是非极化的。所以，在计算中要对初态电子的自旋求平均，对终态电子的自旋求和。(6-18)式表明这个计算是

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\cdots|=\sum_{s,s'}^{2}\frac{1}{2}\overline{u}(p',s')\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu\right.$$

$$\left.+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]u(p,s)\overline{u}(p,s)$$

$$\left[\gamma^\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma^\mu+\gamma^\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma^\nu\right]u(p',s')$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s,s'}\mathrm{Tr}u(p',s')\overline{u}(p',s')\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu\right.$$

$$\left.+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]u(p,s)\overline{u}(p,s)$$

$$\left[\gamma^\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma^\mu+\gamma^\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma^\nu\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\gamma\cdot p'+m}{2m}\right)\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu\right.$$

$$\left.+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}$$

$$\left[\gamma^{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma^{\nu}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\frac{(\gamma\cdot p'+m)}{2\mathrm{m}}\left[\gamma_{\mu}\frac{\gamma\cdot(p+k)+m}{(p+k)^{2}-m^{2}}\gamma_{\nu}\right.$$

$$\left.+\gamma_{\nu}\frac{\gamma\cdot(p-k')+m}{(p-k')^{2}-m^{2}}\gamma_{\mu}\right]\frac{(\gamma\cdot p+m)}{2m}$$

$$\left[\gamma^{\nu}\frac{\gamma\cdot(p+k)+m}{(p+k)^{2}-m^{2}}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\frac{\gamma\cdot(p-k')+m}{(p-k')^{2}-m^{2}}\gamma^{\nu}\right]。$$

考虑到

$$(p+k)^{2}-m^{2}=p^{2}+2p\cdot k+k^{2}-m^{2}=2p\cdot k,$$

$$(p-k')^{2}-m^{2}=p^{2}-2p\cdot k'+k'^{2}-m^{2}=-2p\cdot k',$$

上式可以写成

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\cdots|^{2}=\frac{1}{8m^{2}}\mathrm{Tr}\,(\gamma\cdot p'+m)\left[\gamma_{\mu}\frac{\gamma\cdot(p+k)+m}{2p\cdot k}\gamma_{\nu}\right.$$

$$\left.+\gamma_{\nu}\frac{\gamma\cdot(p-k')+m}{-2p\cdot k'}\gamma_{\mu}\right](\gamma\cdot p+m)$$

$$\left[\gamma^{\nu}\frac{\gamma\cdot(p+k)+m}{2p\cdot k}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\frac{\gamma\cdot(p-k')+m}{-2p\cdot k'}\gamma^{\nu}\right]。$$

其中有四个矩阵因子的求迹，可以写成

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\cdots|^{2}=\frac{\mathrm{I}}{32m^{2}p\cdot kp\cdot k}+\frac{\mathrm{II}}{-32m^{2}p\cdot kp\cdot k'}$$

$$+\frac{\mathrm{III}}{-32m^{2}p\cdot k'p\cdot k}+\frac{\mathrm{IV}}{32m^{2}p\cdot k'p\cdot k'}$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\gamma_{\mu}[\gamma\cdot(p+k)+m]\gamma_{\nu}(\gamma\cdot p+m)\gamma^{\nu}[\gamma\cdot(p+k)+m]\gamma^{\mu}, \tag{6-19}$$

$$\mathrm{II}=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\gamma_{\mu}[\gamma\cdot(p+k)+m]\gamma_{\nu}(\gamma\cdot p+m)\gamma^{\mu}[\gamma\cdot(p-k')+m]\gamma^{\nu},$$

$$\mathrm{III}=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\gamma_{\nu}[\gamma\cdot(p-k')+m]\gamma_{\mu}(\gamma\cdot p+m)\gamma^{\nu}[\gamma\cdot(p+k)+m]\gamma^{\mu},$$

$$\text{IV} = \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k') + m]\gamma_\mu(\gamma\cdot p + m)\gamma^\mu [\gamma\cdot(p-k') + m]\gamma^\nu。$$

**矩阵迹的计算** 在上述的求迹表式中，包含有八个矩阵的乘积。这个计算显得烦难。但是，利用上一章的求迹定理一、二、五，就可以计算出来。

实际上，应用定理五(5-83)式

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4,$$
$$\gamma_\mu\gamma\cdot a\gamma\cdot b\gamma^\mu = 4a\cdot b,$$
$$\gamma_\mu\gamma\cdot a\gamma^\mu = -2\gamma\cdot a,$$
$$\gamma_\mu\gamma\cdot a\gamma\cdot b\gamma\cdot c\gamma^\mu = -2\gamma\cdot c\gamma\cdot b\gamma\cdot a,$$

(6-19)式的矩阵迹就成为

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \mathrm{Tr}\gamma^\mu(\gamma\cdot p' + m)\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k) + m]\gamma_\nu(\gamma\cdot p + m)\gamma^\nu [\gamma\cdot(p+k) + m] \\
&= \mathrm{Tr}(4m - 2\gamma\cdot p')[\gamma\cdot(p+k) + m](4m - 2\gamma\cdot p) [\gamma\cdot(p+k) + m],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} &= \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k)\gamma_\nu\gamma\cdot p + m\gamma\cdot(p+k)\gamma_\nu + m\gamma_\nu\gamma\cdot p + m^2\gamma_\nu]\gamma^\mu[\gamma\cdot(p-k') + m]\gamma^\nu \\
&= \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)[-2\gamma\cdot p\gamma_\nu\gamma\cdot(p+k) + 4m(p+k)_\nu + 4mp_\nu - 2m^2\gamma_\nu][\gamma\cdot(p-k') + m]\gamma^\nu \\
&= \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)[\gamma\cdot(p-k') + m]4m\gamma\cdot(2p+k) + \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)(-2\gamma\cdot p)[4(p+k)\cdot(p-k') - 2m\gamma\cdot(p+k)] + \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)(-2m^2) [4m - 2\gamma\cdot(p-k')],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III} &= \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k')\gamma_\mu\gamma\cdot p + m\gamma\cdot(p-k')\gamma_\mu + m\gamma_\mu\gamma\cdot p + m^2\gamma_\mu]\gamma^\nu[\gamma\cdot(p+k) + m]\gamma^\mu \\
&= \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)[-2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot(p-k') + 4m(p-k')_\mu + 4mp_\mu - 2m^2\gamma_\mu][\gamma\cdot(p+k) + m]\gamma^\mu \\
&= \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)(-2\gamma\cdot p)[4(p-k')\cdot(p+k) - 2m\gamma\cdot(p-k')] + \mathrm{Tr}(\gamma\cdot p' + m)[\gamma\cdot(p+k)
\end{aligned}$$

$$+m]4m\gamma\cdot(2p-k')+\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)(-2m^2)$$
$$[4m-2\gamma\cdot(p+k)],$$

$$\mathrm{IV}=\mathrm{Tr}\gamma^\nu(\gamma\cdot p'+m)\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k')+m]\gamma_\mu(\gamma\cdot p+m)\gamma^\mu$$
$$[\gamma\cdot(p-k')+m]$$
$$=\mathrm{Tr}(4m-2\gamma\cdot p')[\gamma\cdot(p-k')+m](4m-2\gamma\cdot p)$$
$$[\gamma\cdot(p-k')+m]。$$

定理一(5-79)式指出，奇数个 $\gamma$ 矩阵乘积的迹等于零。把它用于上式,就可以去除奇数个 $\gamma$ 矩阵乘积的项,得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}=&\mathrm{Tr}[4m^2-2\gamma\cdot p'\gamma\cdot(p+k)-2m\gamma\cdot(p'-2p-2k)]\\
&[4m^2-2\gamma\cdot p\gamma\cdot(p+k)+2m\gamma\cdot(p+2k)]\\
=&\mathrm{Tr}[16m^4+4\gamma\cdot p'\gamma\cdot(p+k)\gamma\cdot p\gamma\cdot(p+k)\\
&-8m^2\gamma\cdot(p'+p)\gamma\cdot(p+k)+\\
&4m^2\gamma\cdot(p+k+k')\gamma\cdot(p+2k)]\\
=&\mathrm{Tr}[16m^4+4\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot(p+k)\gamma\cdot p\gamma\cdot(p+k)\\
&-8m^2\gamma\cdot(2p+k-k')\gamma\cdot(p+k)\\
&+4m^2\gamma\cdot(p+k+k')\gamma\cdot(p+2k)],\\
\mathrm{II}=&\mathrm{Tr}4m^2\gamma\cdot(2p+k-2k')\gamma\cdot(2p+k)\\
&+\mathrm{Tr}[-8(p+k)\cdot(p-k')\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot p\\
&+4m^2\gamma\cdot p\gamma\cdot(p+k)]+\mathrm{Tr}[4m^2\gamma\cdot(p+k-k')\\
&\gamma\cdot(p-k')-8m^4], \qquad (6\text{-}21)\\
\mathrm{III}=&\mathrm{Tr}[-8(p-k')\cdot(p+k)\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot p\\
&+4m^2\gamma\cdot p\gamma\cdot(p-k')]+\mathrm{Tr}[4m^2\gamma\cdot(2p+2k-k')\\
&\gamma\cdot(2p-k')]+\mathrm{Tr}[4m^2\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot(p+k)\\
&-8m^4],\\
\mathrm{IV}=&\mathrm{Tr}[4m^2-2\gamma\cdot p'\gamma\cdot(p-k')-2m\gamma\cdot(p'-2p+2k')]\\
&(4m^2-2\gamma\cdot p\gamma\cdot(p-k')+2m\gamma\cdot(p-2k')]\\
=&\mathrm{Tr}[16m^4+4\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot(p-k')\gamma\cdot p\gamma\\
&\cdot(p-k')-8m^2\gamma\cdot(2p+k-k')\gamma\cdot(p-k')\\
&+4m^2\gamma\cdot(p-k-k')\gamma\cdot(p-2k')]。
\end{aligned}
$$

上式中的矩阵乘积，都是偶数个$\gamma$矩阵的乘积，利用定理二(5-80)式

$$\mathrm{Tr}I=4,$$
$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot A\gamma\cdot B=4A\cdot B,$$
$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot A\gamma\cdot B\gamma\cdot C\gamma\cdot D=4[A\cdot BC\cdot D-A\cdot CB\cdot D+A\cdot DB\cdot C],$$

就可以得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=64m^4+16k(p+k-k')\cdot(p+k)p\cdot(p+k)\\
&\quad-p\cdot(p+k-k')(p+k)^2]-32m^2(2p+k-k')\\
&\quad\cdot(p+k)+16m^2(p+k+k')\cdot(p+2k),\\
\mathrm{II}&=16m^2(2p+k-2k')\cdot(2p+k)-32(p+k)\\
&\quad\cdot(p-k')(p+k-k')\cdot p+16m^2p\cdot(p+k)\\
&\quad+16m^2(p+k-k')\cdot(p-k')-32m^4,\\
\mathrm{III}&=-32(p-k')\cdot(p+k)p\cdot(p+k-k')+16m^2p\\
&\quad\cdot(p-k')+16m^2(2p+2k-k')\cdot(2p-k')\\
&\quad+16m^2(p+k-k')\cdot(p+k)-32m^4,\\
\mathrm{IV}&=64m^4+16[2(p+k-k')\cdot(p-k')p\cdot(p-k')\\
&\quad-p\cdot(p+k-k')(p-k')^2]-32m^2(2p+k-k')\\
&\quad\cdot(p-k')+16m^2(p-k-k')\cdot(p-2k')。
\end{aligned}\tag{6-22}$$

把四维动量的标积算出，并注意到$p^2=m^2,k^2=0,k'^2=0$，由(6-22)式得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=64m^2+32(m^2+2p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')(m^2+p\cdot k)\\
&\quad-16(m^2+p\cdot k-p\cdot k')(m^2+2p\cdot k)\\
&\quad-32m^2(2m^2+3p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')\\
&\quad+16m^2(m^2+3p\cdot k+p\cdot k'+2k\cdot k')\\
&=64m^4+32(m^4+3m^2p\cdot k+2(p\cdot k)^2-m^2p\cdot k'\\
&\quad-p\cdot kp\cdot k'-p\cdot kk\cdot k'-m^2k\cdot k')\\
&\quad-16(m^4+3m^2p\cdot k+2(p\cdot k)^2-m^2p\cdot k'-2p\cdot kp\cdot k')\\
&\quad-32m^2(2m^2+3p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')
\end{aligned}$$

$$+16m^2(m^2+3p\cdot k+pk'+2k\cdot k')$$

$$=32m^4+32m^2p\cdot k'+32(p\cdot k)^2-32p\cdot kk\cdot k'$$

$$+32m^2k\cdot k',$$

$$\text{II}=16m^2(4m^2+4p\cdot k-4p\cdot k'-2k\cdot k')$$

$$-32(m^2+p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')(m^2+p\cdot k-p\cdot k')$$

$$+16m^2(m^2+p\cdot k)+16m^2(m^2-2p\cdot k'+p\cdot k-k\cdot k')$$

$$-32m^4$$

$$=32m^2(2m^2+2p\cdot k-2p\cdot k'-k\cdot k')$$

$$-32(m^4+2m^2p\cdot k+(p\cdot k)^2-2m^2p\cdot k'$$

$$-2p\cdot kp\cdot k'+(p\cdot k')^2-m^2k\cdot k'-p\cdot kk\cdot k'$$

$$+p\cdot k'k\cdot k')+16m^2(m^2+p\cdot k)$$

$$+16m^2(m^2-2p\cdot k'+p\cdot k-k\cdot k')-32m^4$$

$$=32m^4+32m^2p\cdot k-32m^2p\cdot k'-16m^2k\cdot k'$$

$$-32(p\cdot k)^2-32(p\cdot k')^2+64p\cdot kp\cdot k'$$

$$+32p\cdot kk\cdot k'-32p\cdot k'k\cdot k',$$

$$\text{III}=-32(m^2+p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')(m^2+p\cdot k-p\cdot k')$$

$$+16m^2(m^2-p\cdot k')+16m^2(4m^2-4p\cdot k'+4p\cdot k$$

$$-2k\cdot k')+16m^2(m^2+2p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')-32m^4$$

$$=-32(m^4+2m^2p\cdot k-2m^2p\cdot k'+(p\cdot k)^2$$

$$+(p\cdot k')^2-2p\cdot kp\cdot k'-m^2k\cdot k'-p\cdot kk\cdot k'$$

$$+p\cdot k'k\cdot k')+16m^2(m^2-p\cdot k')$$

$$+16m^2(4m^2-4p\cdot k'+4p\cdot k'-2k\cdot k')$$

$$+16m^2(m^2+2p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')-32m^4$$

$$=32m^4+32m^2p\cdot k-32m^2p\cdot k'-16m^2k\cdot k'$$

$$-32(p\cdot k)^2-32(p\cdot k')^2+64p\cdot kp\cdot k'$$

$$+32p\cdot kk\cdot k'-32p\cdot k'k\cdot k',$$

$$\text{IV}=64m^4+32(m^2-2p\cdot k'+p\cdot k-k\cdot k')(m^2-p\cdot k')$$

$$-16(m^2+p\cdot k-p\cdot k')(m^2-2p\cdot k')$$

$$-32m^2(2m^2-3p\cdot k'+p\cdot k-k\cdot k')$$

$$
\begin{aligned}
&+16m^2(m^2-3p\cdot k'-p\cdot k+2k\cdot k')\\
&=64m^4+32(m^4-3m^2p\cdot k'+2(p\cdot k')^2+m^2p\cdot k\\
&\quad -p\cdot kp\cdot k'-m^2k\cdot k'+p\cdot k'k\cdot k')\\
&\quad -16(m^4-3m^2p\cdot k'+2(p\cdot k')^2+m^2p\cdot k-2p\cdot kp\cdot k')\\
&\quad -32m^2(2m^2-3p\cdot k'+p\cdot k-k\cdot k')\\
&\quad +16m^2(m^2-3p\cdot k'-p\cdot k+2k\cdot k')\\
&=32m^4-32m^2p\cdot k+32m^2k\cdot k'+32(p\cdot k')^2\\
&\quad +32p\cdot k'k\cdot k'。
\end{aligned}
\tag{6-23}
$$

将其中包含 $k\cdot k'$ 的项，根据

$$
\begin{gathered}
k\cdot k'=k\cdot(p+k-p')=p\cdot k-p'\cdot k,\\
(p-k')^2=p^2-2p\cdot k'=(p'-k)=p'^2-2p'\cdot k,\\
p'\cdot k=p\cdot k'\\
k\cdot k'=p\cdot k-p\cdot k',
\end{gathered}
$$

即可把(6-23)式化简为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}&=32m^4+32m^2p\cdot k'+32(p\cdot k)^2-32p\cdot k(p\cdot k-p\cdot k')\\
&\quad +32m^2(p\cdot k-p\cdot k')\\
&=32m^4+32m^2p\cdot k+32p\cdot kp\cdot k',\\
\mathrm{II}&=32m^4+32m^2p\cdot k-32m^2p\cdot k'-16m^2(p\cdot k-p\cdot k')\\
&\quad -32(p\cdot k)^2-32(p\cdot k')^2+64p\cdot kp\cdot k'\\
&\quad +32p\cdot k(p\cdot k-p\cdot k')-32p\cdot k'(p\cdot k-p\cdot k')\\
&=32m^4+16m^2p\cdot k-16m^2p\cdot k',\\
\mathrm{III}&=32m^4+32m^2p\cdot k-32m^2p\cdot k'-16m^2(p\cdot k-p\cdot k')\\
&\quad -32(p\cdot k)^2-32(p\cdot k')^2+64p\cdot kp\cdot k'\\
&\quad +32p\cdot k(p\cdot k-p\cdot k')-32p\cdot k'(p\cdot k-p\cdot k')\\
&=32m^4+16m^2p\cdot k-16m^2p\cdot k',\\
\mathrm{IV}&=32m^4-32m^2p\cdot k+32m^2(p\cdot k-p\cdot k')\\
&\quad +32(p\cdot k')^2+32p\cdot k'(p\cdot k-p\cdot k')\\
&=32m^4-32m^2p\cdot k'+32p\cdot kp\cdot k'。
\end{aligned}
\tag{6-24}
$$

把(6-24)式代入(6-19)式，得

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\cdots|^2=\frac{32m^4+32m^2p\cdot k+32p\cdot kp\cdot k'}{32m^2p\cdot kp\cdot k}$$

$$+\frac{32m^4+16m^2p\cdot k-16m^2p\cdot k'}{-32m^2p\cdot kp\cdot k'}$$

$$+\frac{32m^4+16m^2p\cdot k-16m^2p\cdot k'}{-32m^2p\cdot k'p\cdot k}$$

$$+\frac{32m^4-32m^2p\cdot k'+32p\cdot kp\cdot k'}{32m^2p\cdot k'p\cdot k'}$$

$$=\frac{m^2}{(p\cdot k)^2}+\frac{1}{p\cdot k}+\frac{p\cdot k'}{m^2p\cdot k}-\frac{m^2}{p\cdot kp\cdot k'}-\frac{1}{2p\cdot k'}$$

$$+\frac{1}{2p\cdot k}-\frac{m^2}{p\cdot kp\cdot k'}-\frac{1}{2p\cdot k'}+\frac{1}{2p\cdot k}$$

$$+\frac{m^2}{(p\cdot k')^2}-\frac{1}{p\cdot k'}+\frac{p\cdot k}{m^2p\cdot k'},$$

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\cdots|^2=\frac{m^2}{(p\cdot k)^2}-\frac{2m^2}{p\cdot kp\cdot k'}+\frac{m^2}{(p\cdot k')^2}$$

$$+\frac{2}{p\cdot k}-\frac{2}{p\cdot k'}+\frac{p\cdot k'}{m^2p\cdot k}+\frac{p\cdot k}{m^2p\cdot k'}。\tag{6-25}$$

在实验室坐标系中，$p=(m,\vec{0})$，$p\cdot k=m\omega$，$p\cdot k'=m\omega'$，上式成为

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\cdots|^2=\frac{1}{\omega^2}-\frac{2}{\omega\omega'}+\frac{1}{\omega'^2}+\frac{2}{m\omega}-\frac{2}{m\omega'}+\frac{\omega'}{m^2\omega}$$

$$+\frac{\omega'}{m^2\omega},$$

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\cdots|^2=\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega'}\right)^2+\frac{2}{m}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega'}\right)$$

$$+\frac{1}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}\right)。\tag{6-26}$$

把(6-26)式代入(6-18)式，再代入(6-11)式，得

$$\sigma=\int\frac{e^4(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')}{8mE'\omega\omega'}\Big[\Big(\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}\Big)^2$$

$$+2\Big(\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}\Big)+\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}\Big]\frac{d^3p'd^3k'}{(2\pi)^6}。\quad(6-27)$$

**终态积分** 在实验室坐标系中，能量、动量守恒表示为

$$\vec{k}=\vec{p'}+\vec{k'},\ E'+\omega'=m+\omega,$$

$$E'=\sqrt{\vec{p'}^2+m^2}=\sqrt{|\vec{k}-\vec{k'}|^2+m^2}。$$

由此推知

$$|\vec{k}-\vec{k'}|^2+m^2=(m+\omega+\omega')^2,$$

$$w^2+w'^2-2ww'\cos\theta+m^2=m^2+w^2+w'^2$$

$$+2m\omega+2m\omega'+2\omega w',$$

$$\frac{w'}{w}=\frac{m}{m+w-w\cos\theta},$$

$$\frac{m}{w}-\frac{m}{w'}=-1+\cos\theta,\quad(6-28)$$

$$\Big(\frac{m}{w}-\frac{m}{w'}\Big)^2+2\Big(\frac{m}{w}-\frac{m}{w'}\Big)=-\sin^2\theta。$$

$\theta$ 是出射光子和入射光子之间的夹角，即散射角，上式表明散射能量 $w'$ 和散射角之间的关系。

(6-27)式中的积分是六重积分 $d^3p'd^3k'$。但有四个 $\delta$-函数。我们用 $d^3p'$ 抵消动量守恒的 $\delta^3(\vec{p}+\vec{k}-\vec{p'}-\vec{k'})$。对于 $d^3k'$ 取球坐标

$$d^3k'=\vec{k'}^2d|\vec{k'}|d\Omega=w'^2\frac{d|\vec{k'}|}{dE_f}dE_fd\Omega,\quad(6-29)$$

$dE_f$ 用来抵消能量守恒的 $\delta(E+w-E'-w')$。由于

$$E_f=E'+w'=\sqrt{|\vec{k}-\vec{k'}|^2+m^2}+|\vec{k'}|,$$

$$\frac{dE_f}{d|\vec{k'}|}=1+\frac{w'-w\cos\theta}{E'}=\frac{m+w-w\cos\theta}{E'}$$

$$=\frac{mw}{E'w'}, \qquad (6\text{-}30)$$

把(6-30)式代入(6-29)式,把(6-28)式、(6-29)式代入(6-27)式,得

$$\sigma=\int(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\frac{e^4}{8m^2}\frac{w'^2}{w^2}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\theta\right)\frac{d^3p'dE_fd\Omega}{(2\pi)^6},$$

积掉 $\delta$- 函数后,得总的散射截面为

$$\sigma=\frac{\alpha^2}{2m^2}\int\frac{w'^2}{w^2}\left(\frac{\omega}{\omega}+\frac{w'}{w}-\sin^2\theta\right)d\Omega, \qquad (6\text{-}31)$$

微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{2m^2}\frac{w'^2}{w^2}\left(\frac{w}{w'}+\frac{w'}{w}-\sin^2\theta\right)。 \qquad (6\text{-}32)$$

由于(6-28)式表示的散射能量 $w'$ 和散射角 $\theta$ 之间的关系,对于(6-31)式中的积分是复杂的。但是,在低能光子的情况下,$w'=w$,(6-31)式的积分就容易进行

$$\sigma=\frac{\alpha^2}{2m^2}\int(2-\sin^2\theta)d\Omega=\frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2}, \qquad (6\text{-}33)$$

这就是人所共知的经典电磁散射的汤姆生公式。

## §3. 电子在库仑场中的散射

前两节讨论的问题,是纯量子的问题。费米场是二次量子化的费米场,电磁场是量子化的电磁场。在实际问题中,也有半量子、半经典的情况。例如,在研究电子和原子核的相互作用时,可以把电子和原子核的作用,看成是电子和原子核产生的库

仑场的相互作用，而电子是二次量子化的电子，库仑场是经典的库仑场。同步辐射是高速带电粒子在给定磁场中作圆周运动时产生的。这时，带电粒子可以看作是量子化的，给定磁场却认为是经典的。

电子在库仑场中的散射过程

$$e^-(p,s)+\otimes\to e^-(p',s')+\otimes,$$

就是半量子、半经典的过程。⊗表示给定的、经典的电磁场，电子却是二次量子化的。这个过程是电磁过程，电子除受到给定的、经典电磁场的作用外，还和量子电磁场相互作用，相互作用哈密顿密度是

$$\mathscr{H}_I(x)=e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)+e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_e^\mu(x) \qquad (6\text{-}34)$$

$\psi(x)$、$A^\mu(x)$是量子场，$A_e^\mu(x)$是经典电磁场。

给定的经典电磁场被认为是不变的。上述过程的初态和终态都只有一个电子，

$$|i\rangle=c^+(p,s)|0\rangle,\ |f\rangle=c^+(p',s')|0\rangle。$$

在最低近似下，略去量子电磁场的作用，电子和经典电磁场的作用取一级近似。这时，$S$ 矩阵元是

$$S_{ex}^{(1)}=-ie\int d^4x\langle 0|c(p',s')\bar{\psi}^-(x)\gamma_\mu\psi^+(x)$$

$$A_e^\mu(x)c^+(p,s)|0\rangle,$$

$\psi^+(x)$ 的任务是消灭初态电子，$\bar{\psi}^-(x)$的任务是产生终态电子，上式可以写成

$$S_{ex}^{(1)}=-ie\int d^4x\{c(p',s'),\bar{\psi}^-(x)\}\gamma_\mu\{\psi^+(x),c^+(p,s)\}$$

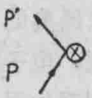
$$A_e^\mu(x)=-ie\int d^4x\sqrt{\frac{m}{VE'}}\bar{u}(p',s')e^{-ip'x}$$

$$\gamma_\mu\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)e^{-ipx}A_e^\mu(x),$$

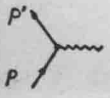
$$S^{(1)}_{ez}=\sqrt{\frac{m}{VE'}}\,\bar{u}(p',s')\,(-ie\gamma_\mu)A^\mu_e(p-p')\sqrt{\frac{m}{VE}}\,u(p,s),$$

$$A^\mu_e(p-p')=\int d^4x A^\mu_e(x)e^{-i(p-p')\cdot x}, \tag{6-35}$$

相应的费曼图是




$$-ie\gamma_\mu A^\mu_e(p-p');$$




$$-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(p'-p+k)\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}。 \tag{6-36}$$

经典电磁场的作用和量子电磁场的作用相比,有对应关系

$$\otimes \rightleftharpoons \sim\sim\sim$$

$$A^\mu_e(p-p') \rightleftharpoons (2\pi)^4\delta^4(p'-p+k)\frac{e^\mu(k.\lambda)}{\sqrt{2V\omega}} \tag{6-37}$$

实际上，以上的对应是动量表象中的电磁场的对应。动量表象中的量子电磁场的势为

$$A^\mu(p-p')=\int d^4x A^\mu(x)e^{-i(p-p')\cdot x}$$

$$=\int d^4x\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}a^+(k,\lambda)e^{ikx}\cdot e^{-i(p-p')\cdot x},$$

$$A^\mu(p-p')=(2\pi)^4\delta^4(p'-p+k)\sum_\lambda\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}a^+(k,\lambda),$$

产生算符的任务是产生终态光子。这正是上述对应的来由。

**库仑场**　当给定的经典电磁场是由原子核激发时，核电荷为 $Ze$、电磁场是库仑场，

$$A_e^\mu(x) = g^{\mu 0}\frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|},$$

$$A_\mu^e(p-p') = \int d^4x A_\mu^e(x) e^{-i(p-p')\cdot x}$$

$$= \frac{g\ ^0 Ze}{4\pi}\int d^4x \frac{1}{|\vec{x}|} e^{-i(p-p')\cdot x}, \tag{6-38}$$

$$A_e^\mu(p-p') = (2\pi)\delta(E-E')\frac{g^{\mu 0}Ze}{|\vec{p}-\vec{p'}|^2}。$$

把它代入(6-35)式，就得到电子在库仑场中散射的 $S$ 矩阵元

$$S_{ex}^{(1)} = -i2\pi\delta(E-E')\frac{Ze^2}{|\vec{p}-\vec{p'}|^2}\sqrt{\frac{m}{VE'}}\bar{u}(p',s')\gamma_0$$

$$\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)。 \tag{6-39}$$

**散射截面** 在实验室坐标系中，给定的经典场是不动的。电子相对于该场的 $\lambda$ 射流密度为

$$J = \rho|\vec{v}| = \frac{1}{V}\ \frac{|\vec{p}|}{E}, \tag{6-40}$$

散射截面就是

$$\sigma = \int\frac{\overline{\sum}|S_{ex}^{(1)}|^2}{J\cdot T}\ \frac{Vd^3p'}{(2\pi)^3} = \int\frac{2\pi\delta(E-E')Z^2e^4m^2}{E'|\vec{p}||\vec{p}-\vec{p'}|^4}$$

$$\overline{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)|^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}。 \tag{6-41}$$

**自旋均和** 通常，入射电子是非极化的，也不区分散射电子的极化。所以，要对入射电子的自旋求平均，对散射电子的自旋求和，需要计算

$$\overline{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)|^2 = \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\bar{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)$$

$$\begin{aligned}
&\overline{u}(p,s)\gamma_0 u(p',s') \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sum_s\sum_{s'} u(p',s')\overline{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)\overline{u}(p,s)\gamma_0 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\frac{\gamma\cdot p'+m}{2m}\gamma_0\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}\gamma_0 \\
&= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'\gamma_0\gamma\cdot p\gamma_0+m^2) \\
&= \frac{4}{8m^2}(2EE'-p\cdot p'+m^2) \\
&= \frac{4}{8m^2}(2EE'-(EE'-\vec{p}\cdot\vec{p'})+E^2-\vec{p}^2)。
\end{aligned}$$

如(6-41)式所示,该过程的能量是守恒的,$E'=E$, $|\vec{p'}|=|\vec{p}|$,但动量方向改变,因而上式可以写成

$$\begin{aligned}
\overline{\sum}|\overline{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)|^2 &= \frac{E^2}{m^2}\left[1-\frac{v^2}{2}(1-\cos\theta)\right] \\
&= \frac{E^2}{m^2}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),
\end{aligned}\qquad(6\text{-}42)$$

代入(6-41)式,得

$$\sigma=\int\frac{2\pi\delta(E-E')Z^2e^4}{v|\vec{p}-\vec{p'}|^4}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}。\qquad(6\text{-}43)$$

**终态积分** 由于能量守恒, $E'=E, |\vec{p'}|=|\vec{p}|$,

$$\begin{aligned}
|\vec{p}-\vec{p'}|^4 &= (2\vec{p}^2-2\vec{p}^2\cos\theta)^2=4\vec{p}^4(1-\cos\theta)^2 \\
&= 16\vec{p}^4\sin^4\frac{\theta}{2},
\end{aligned}$$

取球坐标

$$d^3p'=\vec{p'}^2 d|\vec{p'}|d\Omega=|\vec{p'}|E'dE'd\Omega,$$

代入(6-43)式,积去 $\delta$- 函数,得散射微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4v^2|\vec{p}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)。\qquad(6-44)$$

这是莫特(Mott)在1929年得到的结果，故称莫特截面。在非相对论近似下，$v\to0$，上式成为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4v^2\vec{p}^2\sin^4\frac{\theta}{2}},\qquad(6-45)$$

这是卢瑟福(Ruther ford)公式。1911年，卢瑟福提出了原子的核模型，用这个公式解释了相应的实验。这个公式，在人类认识原子的历史上，发挥了巨大的作用。但是，从量子电动力学的观点看来，它只是非相对论的近似。

## §4. 赝标介子的轻子衰变

$\pi$ 介子和 $K$ 介子，都是自旋为零、宇称为负的粒子。故称赝标介子。它们都会衰变为轻子，衰变为电子及其反中微子，衰变为 $\mu$ 介子及其反中微子。其过程为

$$\phi(k)\to l(p,s)+\tilde{\nu}(q,\tau),$$

$\tilde{\nu}$ 是和轻子 $l$ 相应的反中微子。这是轻子数守恒、电荷守恒所要求的。这些过程是由弱作用引起的，属于弱过程，

**唯象理论** 弱相互作用理论，取得成功的，有四费米 V—A 理论和弱电统一规范理论。在低能情况下，它们是等效的。它们的形式，如(4-87)式所示，不便直接用来讨论上述过程。它们的实质是可以采用的。

轻子流是 V—A 流，有如(4-87)式所示的形式

$$l_\mu=\overline{l}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu(x),$$

介子 $\phi(x)$ 是赝标量，$\partial^\mu\phi(x)$ 是赝矢量。我们设想：制约上述过程的相互作用，是轻子 V—A 流和介子赝矢流的耦合，相互作

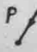
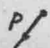
用哈密顿密度是

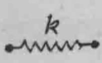
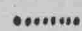
$$\mathscr{H}_i(x)=g_\phi\overline{l}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu(x)\partial^\mu\phi(x), \qquad (6\text{-}46)$$

当然,这只是一种有一定根据的推想,故称唯象理论。

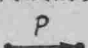
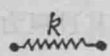
**费曼规则** 在上一章中,我们导出了电磁作用的费曼规则。在非电磁作用的情况下,费曼规则稍有不同。对于外线和内线,它们是自由场的傅立叶分量和自由场传播子,是与相互作用理论无关的。在任何理论中,它们都是一样的。所有外线的费曼规则都是

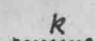
 $\sqrt{\dfrac{m}{VE}}\,\overline{u}(p,s)$;  $\sqrt{\dfrac{m}{VE}}\,u(p,s)$;

 $\sqrt{\dfrac{m}{VE}}\,v(p,s)$;  $\sqrt{\dfrac{m}{VE}}\,\overline{v}(p,s)$;

 $\dfrac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$;  $\dfrac{1}{\sqrt{2V\omega}}$。

所有内线的费曼规则都是

 $\dfrac{i}{\gamma\cdot p-m}$;  $\dfrac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}$;

 $\dfrac{-i}{k^2-m^2}$。

顶角因子却是因理论不同而异的。在电磁作用理论中是

$$\mathscr{H}_i(x)=e\,\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)$$
$$\succ\cdots-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(\cdots),$$

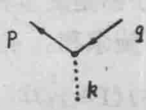
是把$\mathscr{H}_i(x)$中的场量去除后的因子$e\gamma_\mu$,乘以$(-i)$,再乘上保证能量、动量守恒的$\delta$-函数。与此相仿,在上述唯象理论中,顶角因子就是

$$\mathscr{H}_i(x)=g_\phi\overline{l}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu(x)\partial^\mu\phi(x);$$
$$\succ\cdots-ig_\phi\gamma_\mu(1+\gamma_5)(\mp ik^\mu)(2\pi)^4\delta^4(\cdots),$$

时空导数的傅立叶分量是 $\mp ik$。当 $\phi(x)$ 中正频部分起作用时，$ik$ 前取负号。当 $\phi(x)$ 中负频部分起作用时，$ik$ 前取正号。

对于附加于费米子线的三条规则，也是理论无关的。$S$ 矩阵元中的因子是逆着费米子线的顺序排列的。一个闭合费米子圈要附加一个运算 $-\mathrm{Tr}$。两个图形的差别，只是交换一对费米子线的位置时，S矩阵元中的相应两项要差一负号。

**衰变寿命** 赝标介子衰变为轻子的过程，在上述唯象理论(6－46)式的最低阶近似下，其费曼图是




按照上述费曼规则，与此相应的 $S$ 矩阵元是

$$S^{(1)}_{\phi l}=\sqrt{\frac{m}{VE}}\,\overline{u}(p,s)\Big(-g_{\phi}\gamma_{\mu}(1+\gamma_5)k^{\mu}(2\pi)^4\delta^4(p+q-k)\Big)$$

$$\sqrt{\frac{1}{V}}\,v(q,\tau)\frac{1}{\sqrt{2Vw}},$$

中微子没有质量，规一化因子是 $\sqrt{\frac{1}{V}}$，不是 $\sqrt{\frac{m}{VE}}$。由于能量、动量守恒和狄拉克方程

$$k=p+q,\quad \overline{u}(p,s)p\cdot\gamma=m\overline{u}(p,s),\quad \gamma\cdot qv(q,\tau)=0,$$

$$\overline{u}(p,s)\gamma\cdot k(1+\gamma_5)v(q,\tau)=\overline{u}(p,s)[\gamma\cdot p(1+\gamma_5)$$

$$+(1-\gamma_5)\gamma\cdot q]v(q,\tau)=m\overline{u}(p,s)(1+\gamma_5)v(q,\tau),$$

上述 $S$ 矩阵元成为

$$S^{(1)}_{\phi l}=\sqrt{\frac{m}{VE}}\,\overline{u}(p,s)\Big(-g_{\phi}m(1+\gamma_5)(2\pi)^4\delta^4(p+q-k)\Big)$$

$$\sqrt{\frac{1}{V}}\,v(q,\tau)\frac{1}{\sqrt{2V\omega}},$$

赝标介子 $\phi$ 衰变为轻子 $(l,\bar{\nu})$ 的寿命，就是

$$\frac{1}{\tau}=\int\frac{\overline{\sum}|S^{(1)}_{\phi l}|^2}{T}\frac{V^2d^3pd^3q}{(2\pi)^6}=\int\frac{g_\phi^2m^2}{2E\omega}(2\pi)^4\delta^4(p+q-k)$$

$$\overline{\sum}|\cdots|^2\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6},\tag{6-47}$$

$$\overline{\sum}|\cdots|^2=\overline{\sum}|\overline{u}(p,s)(1+\gamma_5)v(q,\tau)|^2。$$

**自旋求和** 初态粒子是标量粒子，既无自旋，又无极化，不存在均和问题。终态粒子都是旋量粒子，不区分它们的自旋取向时，就需要对它们的自旋求和。

$$\overline{\sum}|\cdots|^2=\sum_{s,\tau}\overline{u}(p,s)(1+\gamma_5)v(q,\tau)\overline{v}(q,\tau)(1-\gamma_5)u(p,s)$$

$$=\mathrm{Tr}\sum_s u(p,s)\overline{u}(p,s)(1+\gamma_5)\sum_\tau v(q,\tau)\overline{v}(q,\tau)(1-\gamma_5)$$

$$=\mathrm{Tr}\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}(1+\gamma_5)\frac{\gamma\cdot q}{2|\vec{q}|}(1-\gamma_5),$$

中微子没有质量

$$\sum_\tau v(q,\tau)\overline{v}(q,\tau)=\frac{\gamma\cdot q}{2|\vec{q}|}\neq\frac{\gamma\cdot q+m}{2m}。$$

按照定理一、二、三，上式为

$$\overline{\sum}|\cdots|^2=\frac{1}{4m|\vec{q}|}\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p+m)\gamma\cdot q2(1-\gamma_5)$$

$$=\frac{1}{2m|\vec{q}|}\mathrm{Tr}\gamma\cdot p\gamma\cdot q(1-\gamma_5)$$

$$=\frac{1}{2m|\vec{q}|}\mathrm{Tr}\gamma\cdot p\gamma\cdot q=\frac{2p\cdot q}{m|\vec{q}|},$$

把它代入(6-47)式，得

$$\frac{1}{\tau}=\int(2\pi)^4\delta^4(p+q-k)\frac{g_\phi^2 m^2 p\cdot q}{E\omega|\vec{q}|}\frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6}。\quad(6-48)$$

**终态积分** 在介子静止的坐标系中

$$k=(m_\phi,\ \vec{0}),w=m_\phi,$$

能量、动量守恒为

$$m_\phi=E+q_0,\quad \vec{p}=-\vec{q},$$

$$E=\sqrt{\vec{q}^2+m^2}=\sqrt{q_0^2+m^2},$$

$$q_0^2+m^2=(m_\phi-q_0)^2=m_\phi^2-2q_0m_\phi+q_0^2,$$

$$q_0=\frac{1}{2}\frac{m_\phi^2-m^2}{m_\phi},$$

$$p\cdot q=Eq_0-\vec{p}\cdot\vec{q}=Eq_0+q_0^2=(E+q_0)q_0=\omega|\vec{q}|。$$

(6-48)式中的积分是六重积分，有四个 $\delta$-函数。$d^3p$ 可用来抵消 $\delta^3(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})$。$d^3q$ 在球坐标系中为

$$d^3q=q_0^2dq_0d\Omega=q_0^2\frac{dq_0}{dE_f}dE_fd\Omega,$$

$$E_f=E+q_0=\sqrt{q_0^2+m^2}+q_0,$$

$$\frac{dE_f}{dq_0}=1+\frac{q_0}{E}=\frac{E+q_0}{E}=\frac{m_\phi}{E},$$

$dE_f$ 的作用是积掉 $\delta(w-E-q_0)$。把以上结果代入(6-48)式，就得到

$$\frac{1}{\tau}=\int\frac{g_\phi^2m^2}{(2\pi)^4E}\cdot\frac{E}{m_\phi}\cdot\left(\frac{m_\phi^2-m^2}{2m_\phi}\right)^2d\Omega,$$

$$\frac{1}{\tau}=\frac{g_\phi^2\ m^2}{4\pi}m_\phi\left(1-\frac{m^2}{m_\phi^2}\right)^2\quad(6-49)$$

只和介子的质量 $m_\phi$、轻子的质量 $m$ 有关。耦合常数 $g_\phi$ 是唯象参数，是未知的，要由实验确定。

把(6-49)式用于$\pi$介子的轻子衰变时，得

$$\frac{1}{\tau(\pi\to e\overline{\nu_e})}=\frac{g_\pi^2}{4\pi}m_e^2m_\pi\left(1-\frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\tau(\pi\to\mu\overline{\nu_\mu})}=\frac{g_\pi^2}{4\pi}m_\mu^2m_\pi\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2,$$

$$\frac{\tau(\pi\to\mu\overline{\nu_\mu})}{\tau(\pi\to e\overline{\nu_e})}=\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right)\left(\frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2-m_\mu^2}\right)^2\simeq 1.30\times10^{-4}。$$

把(6-49)式用于$K$介子的轻子衰变时，得

$$\frac{1}{\tau(K\to e\overline{\nu_e})}=\frac{g_K^2}{4\pi}m_e^2m_K\left(1-\frac{m_e^2}{m_K^2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\tau(K\to\mu\overline{\nu_\mu})}=\frac{g_K^2}{4\pi}m_\mu^2m_K\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_K^2}\right)^2,$$

$$\frac{\tau(K\to\mu\overline{\nu_\mu})}{\tau(K\to e\overline{\nu_e})}=\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\left(\frac{m_K^2-m_e^2}{m_K^2-m_\mu^2}\right)^2\simeq 2.57\times10^{-5},$$

这结果和实验符合得很好。这证明：V-A轻子流和上述唯象理论，是有一定道理的。

## §5. μ介子的衰变

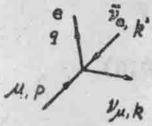
$\mu$介子是轻子。$\mu$介子衰变为电子的过程

$$\mu^-(p,s)\to e^-(q,\tau)+\nu_\mu(k,\sigma)+\overline{\nu_e}(k',\sigma')$$

是纯轻子过程。$\mu$轻子和$e$轻子分别守恒。决定着这一过程的作用，是弱相互作用。哈密顿密度是

$$\mathscr{H}_i(x)=\frac{G}{\sqrt{2}}\overline{\nu_\mu}(x)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\mu(x)\overline{e}(x)\gamma^\lambda(1+\gamma_5)\nu_e(x) \tag{6-50}$$

其最低阶近似的费曼图和顶角因子是




$$(-i)\frac{G}{\sqrt{2}}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\cdots\gamma^\lambda(1+\gamma_5)(2\pi)^4$$

$$\delta^4(p-q-k-k'),$$

相应的 $S$ 矩阵元是

$$S_\mu^{(1)}=\sqrt{\frac{m_e}{Vq_0}}\,\overline{u}(q,\tau)(-i)\frac{G}{\sqrt{2}}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\sqrt{\frac{1}{V}}\,v(k',\sigma')$$

$$\sqrt{\frac{1}{V}}\,\overline{u}(k,\sigma)\gamma^\lambda(1+\gamma^5)\sqrt{\frac{m_\mu}{Vp_0}}u(p,s),$$

$\mu$ 介子的寿命是

$$\frac{1}{\tau}=\int\frac{\overline{\sum}|S_\mu^{(1)}|^2}{T}\frac{Vd^3qVd^3kVd^3k'}{(2\pi)^3(2\pi)^3(2\pi)^3}$$

$$=\int\frac{G^2m_\mu m_e}{2p_0q_0}(2\pi)^4\delta^4(p-q-k-k')$$

$$\overline{\sum}|\cdots|^2\frac{d^3qd^3kd^3k'}{(2\pi)^9}, \tag{6-51}$$

$$\overline{\sum}|\cdots|^2=\overline{\sum}|\overline{u}(q,\tau)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v(k',\sigma')$$

$$\overline{u}(k,\sigma)\gamma^\lambda(1+\gamma_5)u(p,s)|^2。$$

**自旋均和**　衰变的 $\mu$ 介子是非极化的，也不区分生成的电子，中微子的极化。因而，在计算中，要对 $\mu$ 介子的自旋求平均对电子、中微子的自旋求和，即需计算(6-51)式的第二式。

$$\overline{\sum}|\cdots|^2=\frac{1}{2}\sum_{s,\tau,\sigma,\sigma'}\overline{u}(q,\tau)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v(k',\sigma')$$

$$\overline{u}(k,\sigma)\gamma^\lambda(1+\gamma_5)u(p,s)\cdot\overline{u}(p,s)\gamma^\mu$$

$$(1+\gamma_5)u(k,\sigma)\overline{v}(k',\sigma')\gamma_\mu(1+\gamma_5)u(q,\tau)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s,\tau,\sigma,\sigma'}\overline{u}(q,\tau)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v(k',\sigma')\overline{v}(k',\sigma')\cdot$$

$$\gamma_\mu(1+\gamma_5)u(q,\tau)\cdot\overline{u}(k,\sigma)\gamma^\lambda(1+\gamma_5)u(p,s)$$

$$\overline{u}(p,s)\gamma^\mu(1+\gamma_5)u(k,\sigma)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sum_\tau u(q,\tau)\overline{u}(q,\tau)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\sum_{\sigma'}v(k',\sigma')\cdot$$

$$\overline{v}(k',\sigma')\gamma_\mu(1+\gamma_5)\cdot\mathrm{Tr}\sum_\sigma u(k,\sigma)\overline{u}(k,\sigma)$$

$$\gamma^\lambda(1+\gamma_5)\sum_s u(p,s)\overline{u}(p,s)\gamma_\mu(1+\gamma_5)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma\cdot q+m_e}{2m_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\frac{\gamma\cdot k'}{2k_0'}\gamma_\mu(1+\gamma_5)$$

$$\cdot\mathrm{Tr}\frac{\gamma\cdot k}{2k_0}\gamma^\lambda(1+\gamma_5)\frac{\gamma\cdot p+m_\mu}{2m_\mu}\gamma^\mu(1+\gamma_5)$$

$$=\frac{1}{32m_em_\mu k_0k_0'}\mathrm{Tr}(\gamma\cdot q+m_e)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\gamma\cdot k'\gamma_\mu$$

$$(1+\gamma_5)\cdot\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p+m_\mu)\gamma^\mu(1+\gamma_5)\gamma\cdot k\gamma^\lambda(1+\gamma_5)\cdot$$

$$=\frac{1}{8m_em_\mu k_0k_0'}\mathrm{Tr}(\gamma\cdot q+m_e)\gamma_\lambda\gamma\cdot k'\gamma_\mu(1+\gamma_5)$$

$$\cdot\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p+m_\mu)\gamma^\mu\gamma\cdot k\gamma^\lambda(1+\gamma_5)$$

$$=\frac{1}{8m_em_\mu k_0k_0'}\mathrm{Tr}\gamma\cdot q\gamma_\lambda\gamma\cdot k'\gamma_\mu(1+\gamma_5)$$

$$\cdot\mathrm{Tr}\gamma\cdot p\gamma^\mu\gamma\cdot k\gamma^\lambda(1+\gamma_5)$$

$$=\frac{2}{m_em_\mu k_0k_0'}[q_\lambda k_\mu'+q_\mu k_\lambda'-g_{\mu\lambda}q\cdot k'-i\varepsilon_{\alpha\lambda\beta\mu}q^\alpha k'^\beta]$$

$$\cdot[p^\mu k^\lambda+p^\lambda k^\mu-g^{\mu\lambda}p\cdot k-i\varepsilon^{\sigma\mu\rho\lambda}p_\sigma k_\rho]$$

$$=\frac{2}{m_em_\mu k_0k_0'}[(q_\lambda k_\mu'+q_\mu k_\lambda'-g_{\mu\lambda}q\cdot k')$$

$$(p^\mu k_\lambda+p^\lambda k^\mu-g^{\mu\lambda}p\cdot k)-\varepsilon_{\alpha\lambda\beta\mu}\varepsilon^{\sigma\mu\rho\lambda}q^\alpha k'^\beta p_\sigma k_\rho]$$

$$=\frac{2}{m_e m_\mu k_0 k_0'}[2(p\cdot k' q\cdot k+p\cdot q k\cdot k')+2(p\cdot k' q\cdot k$$

$$-p\cdot q k\cdot k')]$$

$$=\frac{8}{m_e m_\mu k_0 k_0'}p\cdot k' q\cdot k。\qquad (6\text{-}52)$$

这里应用了 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 是四维四阶全反对称张量，任意两指标相同为零，而

$$\varepsilon_{0123}=1,\quad \varepsilon^{0123}=-1,$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}=-2(g_\alpha^\sigma g_\beta^\rho-g_\alpha^\rho g_\beta^\sigma),$$

把(6-52)式代入(6-51)式，得

$$\frac{1}{\tau}=\int\frac{4G^2(2\pi)^4\delta^4(p-q-k-k')}{p_0 q_0 k_0 k_0'}p\cdot k' q\cdot k$$

$$\frac{d^3q d^3k d^3k'}{(2\pi)^9}。\qquad (6\text{-}53)$$

**中微子动量积分**　上式中的积分是九重积分，有四个 $\delta$-函数。积分是烦难的。我们先计算中微子动量的积分

$$I_\mu=\int\delta^4(p-q-k-k')\frac{k_\mu k_\nu'}{k_0 k_0'}d^3k d^3k'。\qquad (6\text{-}54)$$

由于能量、动量守恒是洛仑兹不变的，因而 $\delta^4(p-q-k-k')$ 是洛仑兹不变的。而

$$\frac{d^3k}{2k_0}=d^3k\int dk_0\delta(k^2)\varepsilon(k_0)=\int d^4k\delta(k^2)\varepsilon(k_0),$$

$d^4k$，$\delta(k^2)$和 $\varepsilon(k_0)$都是洛仑兹不变的，所以 $d^3k/k_0$ 也是洛仑兹不变的。由是可知，$I_{\mu\nu}$ 是四维空间的二阶张量。(6-54)式是 $k$、$k'$ 的积分，其结果是 $p-q$ 的函数。因此，$I_{\mu\nu}$ 应该是由 $g_{\mu\nu}$ 和 $(p-q)_\mu(p-q)_\nu$ 构成的二阶张量，其一般形式为

$$I_{\mu\nu}=Ag_{\mu\nu}+B(p-q)_\mu(p-q)_\nu,\qquad (6\text{-}55)$$

$A$、$B$ 是$(p-q)^2$ 的函数。

为了推出 $A$、$B$ 的函数形式，我们在一个特殊坐标系中，

计算(6-54)式。这坐标系的特点是

$$\vec{p}-\vec{q}=0,\quad \vec{k}+\vec{k'}=0, \tag{6-56}$$

动量守恒,使它们能够同时成立。因而

$$\vec{k'}=-\vec{k},\qquad k_0'=k_0,$$

$$I_{00}=\int\delta^4(p-q-k-k')d^3kd^3k', \tag{6-57}$$

$$I_{11}+I_{22}+I_{33}=\int\delta^3(p-q-k-k')\frac{-k_1^2-k_2^2-k_3^2}{k_0^2}$$

$$d^3kd^3k'=-I_{00}。$$

由于坐标 1、2、3 的对称性,应有

$$I_{11}=I_{22}=I_{33}=-\frac{1}{3}I_{00}。 \tag{6-58}$$

在(6-57)式的计算中,先对 $k'$ 积分,去除 $\delta^3(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k}-\vec{k'})$,得

$$I_{00}=\int\delta(p_0-q_0-k_0-k_0')d^3k。 \tag{6-59}$$

取球坐标

$$d^3k=k_0^2dk_0d\Omega=k_0^2\frac{dk_0}{dE_f}dE_fd\Omega,$$

代入(6-59)式,用 $dE_f$ 积去 $\delta(p_0-E_f)$,得

$$I_{00}=\int k_0^2\frac{dk_0}{dE_f}d\Omega=4\pi k_0^2\frac{dk_0}{dE_f}。 \tag{6-60}$$

由能量守恒

$$E_f=q_0+k_0+k_0'=q_0+2k_0,\quad p_0=q_0+2k_0$$

推知

$$\frac{dE_f}{dk_0}=2,\qquad k_0=\frac{1}{2}(p_0-q_0)。$$

代入(6-60)式、(6-58)式,得

$$I_{00} = \frac{\pi}{2}(p_0 - q_0)^2, \quad I_{ii} = -\frac{\pi}{6}(p_0 - q_0)^2。 \tag{6-61}$$

另一方面，在上述 $\vec{p} - \vec{q} = 0$，$\vec{k} + \vec{k'} = 0$ 的坐标系中，(6-55)式成为

$$I_{00} = A + B(p_0 - q_0)^2, \quad I_{ii} = -A, \tag{6-62}$$

它应和(6-61)式的结果相等，即

$$A + B(p_0 - q_0)^2 = \frac{\pi}{2}(p_0 - q_0)^2,$$

$$A = \frac{\pi}{6}(p_0 - q_0)^2, \quad B = \frac{\pi}{3}。$$

从张量分析推定 $A$、$B$ 应是 $(p-q)^2$ 的函数。在 $\vec{p} - \vec{q} = 0$ 的坐标系中

$$(p-q)^2 = (p_0 - q_0)^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2 = (p_0 - q_0)^2,$$

所以，在一般的坐标系中

$$A = \frac{\pi}{6}(p-q)^2, B = \frac{\pi}{3},$$

$$I_{\mu\nu} = \frac{\pi}{6}(p-q)^2\left[g_{\mu\nu} + \frac{2(p-q)_\mu}{(p-q)^2}(p-q)_\nu\right], \tag{6-63}$$

这就是(6-54)式积分的结果。把它代入(6-53)式，得

$$\frac{1}{\tau} = \int \frac{4G^2 I_{\mu\nu} q^\mu p^\nu}{p_0 q_0 (2\pi)^5} d^3q, \tag{6-64}$$

$$I_{\mu\nu} q^\mu p^\nu = \frac{\pi}{6}(p-q)^2\left[p\cdot q + \frac{2q\cdot(p-q)p\cdot(p-q)}{(p-q)^2}\right]。$$

**电子动量积分** 剩下的，只是对电子动量 $\vec{q}$ 的积分。它要受到能量、动量守恒的限制。(6-64)式中的被积函数

$$I_{\mu\nu} q^\mu p^\nu = \frac{\pi}{6}(p-q)^2(p\cdot q) + \frac{\pi}{3}(p\cdot q - q^2)(p^2 - p\cdot q)$$

$$= \frac{\pi}{6}(m_\mu^2 + m_e^2 - 2p\cdot q)(p\cdot q) + \frac{\pi}{3}(p\cdot q - m_e^2)$$

$$(m_\mu^2 - p\cdot q)$$

$$= \frac{\pi}{6}[3(m_\mu^2 + m_e^2)p\cdot q - 2m_e^2 m_\mu^2 - 4(p\cdot q)^2],$$

寿命为

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{3(2\pi)^4}\int \frac{1}{p_0 q_0}[3(m_\mu^2 + m_e^2)p\cdot q - 2m_e^2 m_\mu^2$$

$$- 4(p\cdot q)^2]d^3q。$$

在$\mu$介子静止的坐标系中，$p = (m_\mu, \vec{0})$，

$$p\cdot q = p_0 q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q} = m_\mu q_0,$$

$$d^3q = |\vec{q}|q_0 dq_0 d\Omega,$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{3(2\pi)^4}\int_{m_e}^{\frac{1}{2}m_\mu}\left[3(m_\mu^2 + m_e^2) - 4m_\mu q_0\right.$$

$$\left. - 2m_e^2\frac{m_\mu}{q_0}\right]|\vec{q}|q_0 dq_0 d\Omega。$$

电子的最小能量是$m_e$，两个中微子动量相等而反向。当两个中微子同向发射时，电子沿另一方向发射，占有$\mu$介子能量的一半，是其最大能量$\frac{1}{2}m_\mu$。这是$q_0$积分限的来由。

由于$|\vec{q}| = \sqrt{q_0^2 - m_e^2}$，上式积分仍不简便。考虑到$m_e \ll m_\mu$，可令$m_e \to 0$，则$|\vec{q}| = q_0$，

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{3(2\pi)^4}\int_0^{\frac{1}{2}m\mu}(3m_\mu^2 - 4m_\mu q_0)q_0^2 dq_0 d\Omega$$

$$= \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}。\qquad (6\text{-}65)$$

$\mu$ 介子的寿命 $\tau$ 和质量 $m_\mu$，都可以由实验测定。上式可用来确定弱作用耦合常数，结果是

$$G=1.01\times10^{-5}/m_p^2,$$

$m_p$ 是质子质量。

## 习 题 六

本章计算了五个过程，试对它们进行综合评述。

1. 如何写出寿命或截面的计算公式？
2. 如何计算自旋的平均和求和？
3. 如何计算极化的平均和求和？
4. 如何计算终态积分？

# 第七章　单圈计算和重正化

量子场论的微扰理论，用来计算粒子过程的寿命和截面，是富有成效的。树图近似的计算结果，如第六章所示，是有限的。单圈近似，从理论上来说，比树图近似更高一级，应该更加精确。可是，计算结果表明：它们是发散的，是没有意义的。这使量子场论的发展，一度停顿下来。后来，经过人们的努力，找到了克服这一困难的办法——重正化方法，使量子场论又重新活跃起来。重正化方法，包括两个步骤——正规化和重正化。首先，把发散积分作成某种有限积分的极限，并把在极限情况下的发散部分和有限部分分离开来。这一步骤叫做正规化。然后，把发散部分归之于质量、耦合常数或场量，用重新定义质量、耦合常数、场量的办法，消除发散。这一步骤叫做重正化。在这一章中，我们论述单圈图的计算，介绍相应的正规化和重正化。正规化方法，大致有三种：泡里 (Pauli)-维勒斯 (Villars) 的正规子方法；费曼 (Fegnman) 的截割方法；特荷夫 (t'Hooft) 的维数正规化方法。我们以量子电动力学 (QED) 为例，用三种方法计算三个基本的单圈发散：费米子自能、真空极化和顶角因子，并用相加重正化、相乘重正化方法消除发散。

## §1. 费米子自能

在量子电动力学中，只涉及旋量场时，费曼图中就只有三个组成部分：费米子线、光子线和顶角。费米子线有内线和外线，最低阶近似时，它们是

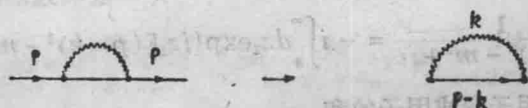
$$\text{——•——} \quad \frac{1}{\gamma\cdot p-m}; \qquad \text{——→} \quad \bar{u}(p)$$

考虑高阶近似时，就会出现单圈图



当然，还会出现更高阶的多圈图。这些图形叫做自能图。

**费米子自能部分** 出现在费米子内线或外线中的圈图，如下图所示，是截掉外腿后留下的部分




叫做费米子的自能部分。按照费曼规则，相应的矩阵是

$$-i\Sigma(p)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon}(-ie\gamma_\mu)$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p-k)-m+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)。\qquad(7\text{-}2)$$

左边的 $-i\Sigma(p)$ 是表示自能部分的符号，右边的积分是四重积分，分母与 $k^3$ 成比例。当积分限取无穷时，表观看来，积分是线性发散的。所以，这种发散叫做紫外发散。式中的 $\lambda$，作为光子的质量，是为了积分在 $k\to0$ 处不发散而引入的，即是为了避免红外发散而引入的。当然，它实际上是零，在计算的最后结果中，必需令它为 $\lambda\to0$。

整理一下，(7-2) 式可以写成

$$\Sigma(p)=-ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+m]\gamma^\mu}{[k^2-\lambda^2+i\varepsilon][(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]}。$$

利用夹积定理五 (5-83) 式，上式中的分子

$$\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+m]\gamma^\mu=4m-2\gamma\cdot(p-k),$$

代入上式，得

$$\Sigma(p)=ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{2\gamma\cdot(p-k)-4m}{[k^2-\lambda^2+i\varepsilon][(p-k^2)-m^2+i\varepsilon]}。\qquad(7\text{-}3)$$

**分母的积化和** 分母中的被积函数是以乘积因子的形式出现的，对于积分，诸多不便。通常，用适当的技巧，把它变成诸因子的和。乘积因子来自回路中的传播子，经常出现在矩阵元中。对它的处理，具有一定的普遍意义。因此，人们设计了多种方案。这里，我们介绍其中的一种，即利用积分公式

$$\frac{1}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon}=-i\int_0^\infty dz_1\exp[iz_1(k^2-\lambda^2+i\varepsilon)],$$

$$\frac{1}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}=-i\int_0^\infty dz_2\exp\{iz_2[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]\}.$$

把乘积因子变成因子的和

$$\sum(p)=ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[4m-2\gamma\cdot(p-k)]$$

$$\int_0^\infty dz_1dz_2\exp\{iz_1[k_2-\lambda^2+i\varepsilon]+iz_2[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]\}.$$

交换积分次序，得

$$\sum(p)=ie^2\int_0^\infty dz_1,dz_2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[4m-2\gamma\cdot(p-k)]$$

$$\exp\{i[z_1k^2+z_2(p-k)^2-z_1\lambda^2-z_2m^2+(z_1+z_2)\varepsilon]\}。$$

**高斯积分** 上式对 $k$ 的积分是高斯型的。指数上的 $k$，有平方部分，也有线性部分。要算出它的结果，先要配成只有平方的形式。为此，作积分变数变换

$$k\to l=k-\frac{z_2}{z_1+z_2}p=k-p+\frac{z_1}{z_1+z_2}p,\quad d^4k=d^4l,$$

$$z_1k^2+z_2(p-k)^2=z_1\left(l+\frac{z_2}{z_1+z_2}p\right)^2$$

$$+z_2\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}p-l\right)^2=(z_1+z_2)l^2+\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}p^2.$$

上式成为

$$\sum(p)=ie^2\int_0^\infty dz_1dz_2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\left[4m-2\gamma\cdot\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}p-l\right)\right]$$

$$\exp\left\{i\left[(z_1+z_2)l^2+\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}p^2-z_1\lambda^2-z_2m^2+(z_1+z_2)\varepsilon\right]\right\}。$$

式中包含 $l$ 的线性项，它们是奇函数，积分结果为零。有贡献的，是偶函数部分

$$\sum(p)=ie^2\int_0^\infty dz_1dz_2\left[4m-\frac{2z_1}{z_1+z_2}\gamma\cdot p\right]\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}$$

$$\exp\left\{i\left[(z_1+z_2)l^2+\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}p^2-z_1\lambda^2-z_2m^2+(z_1+z_2)\varepsilon\right]\right\},\tag{7-4}$$

是有虚数因子 $i$ 的高斯积分。

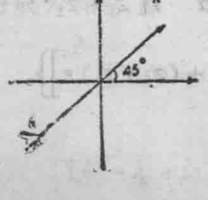
普通的高斯积分，是人们熟知的

$$\int_{-\infty}^\infty dxe^{-ax^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,$$

$a$ 为正的实数。对于 $e^{iby^2}$ 的情况，令

$$iby^2=-x^2,\quad dy=-\frac{1}{\sqrt{ib}}dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty dye^{iby^2}=-\frac{1}{\sqrt{ib}}\int_{\sqrt{ib}\,\infty}^{-\sqrt{ib}\,\infty}dxe^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{ib}}\int_{-\infty e^{i\frac{\pi}{4}}}^{\infty e^{i\frac{\pi}{4}}}dxe^{-x^2}。$$




如左图所示，积分是在 x 复平面上，沿着与实轴成 45° 角的直线进行。由于被积函数 $e^{-x^2}$ 是解析函数，在无穷远处为零。故沿上述直线的积分等于沿实轴的积分，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iby^2} = \frac{1}{\sqrt{ib}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{ib}}\,, \tag{7-5}$$

这就是推广的高斯积分。

把 (7-5) 式用于 (7-4) 式的计算，得

$$\int d^4 l e^{i(z_1+z_2)l^2} = \int dl_0 e^{i(z_1+z_2)l_0^2} \cdot \int dl_1 e^{-i(z_1+z_2)l_1^2}$$

$$\cdot \int dl_2 e^{-i(z_1+z_2)l_2^2} \cdot \int dl_3 e^{-i(z_1+z_2)l_3^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{i(z_1+z_2)}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{-i(z_1+z_2)}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{-i(z_1+z_2)}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{-i(z_1+z_2)}}$$

$$= -i\left(\frac{\pi}{z_1+z_2}\right)^2,$$

代入 (7-4) 式，得

$$\sum(p) = \frac{-e^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dz_1 dz_2}{(z_1+z_2)^2} \left[\frac{z_1}{z_1+z_2} \gamma \cdot p - 2m\right]$$

$$\exp\left\{i\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} p^2 - z_1 \lambda^2 - z_2 m^2 + (z_1+z_2)\varepsilon\right]\right\}。 \tag{7-6}$$

**约化** 被积函数 $z_1$、$z_2$，既以积的形式出现，又以和的形式出现，交缠在一起，诸多不便。为此，引用公式

$$\int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} \delta\left(1 - \frac{z_1+z_2}{\alpha}\right) = 1 \tag{7-7}$$

把它化简。把 (7-7) 式代入 (7-6) 式，得

$$\sum(p) = \frac{-e^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 d\alpha}{(z_1+z_2)^2 \alpha} \delta\left(1 - \frac{z_1+z_2}{\alpha}\right) \left[\frac{z_1}{z_1+z_2} \gamma p\right.$$

$$\left. - 2m\right] \exp\left\{i\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} p^2 - z_1 \lambda^2 - z_2 m^2 + (z_1+z_2)\varepsilon\right]\right\}。$$

对积分变数 $z_1$、$z_2$ 作变换

$$z_1 \to \alpha z_1, \quad z_2 \to \alpha z_2,$$

上式成为

$$\sum(p)=\frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^\infty\frac{dz_1dz_2d\alpha}{(z_1+z_2)^2\alpha}\delta(1-z_1-z_2)\left[\frac{z_1}{z_1+z_2}\gamma p-2m\right]\exp\left[i\alpha\left[\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}p^2-z_1\lambda^2-z_2m^2+(z_1+z_2)\varepsilon\right]\right\}。$$

对 $z_1$ 积分，并令 $z_2=z$，就得到

$$\sum(p)=\frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^\infty dz[(1-z)\gamma\cdot p-2m]\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha}\exp\{i\alpha[z(1-z)p^2-(1-z)\lambda^2-zm^2+\varepsilon]\}。\tag{7-8}$$

**正规化** (7-8) 式中，对 $\alpha$ 的积分是发散的。实际上，(7-3) 式中，对 $k$ 的积分是发散的。经过上述几个步骤的处理，对 $k$ 发散的积分，变成了对 $\alpha$ 发散的积分。不过，后者比前者易于处理。

设想，在 (7-3) 式中，作代换

$$\frac{1}{(p-k)^2-m^2}\to\frac{1}{(p-k)^2-m^2}-\frac{1}{(p-k)^2-M^2},\tag{7-9}$$

就得到

$$\sum(p)=ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{2\gamma\cdot(p-k)-4m}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon}\left[\frac{1}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}-\frac{1}{(p-k)^2-M^2+i\varepsilon}\right],\tag{7-10}$$

当 $M^2\to\infty$ 时，上式就是 (7-3) 式表示的积分。(7-9) 式的代换，象是引进了一个辅助的、质量为 $m$ 的粒子，人们称之为正规子。它的作用，是和原来的费米子一起，使 (7-10) 式对 $k$ 的积分成为有限，即

$$\sum(p)=ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{[2\gamma\cdot(p-k)-4m](m^2-M^2)}{[k^2-\lambda^2+i\varepsilon]\cdot[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon][(p-k)^2-M^2+i\varepsilon]}$$

是有限积分。在极限情况下，$M^2\to\infty$，它与（7-3）式等价。所以，我们把（7-3）式看作（7-10）式的极限表示式。

（7-10）式和（7-3）式的差别，在于多了一个质量为$M$的正规子项。我们由（7-3）式导出了（7-8）式。用同样的步骤，由（7-10）式，可以导出与（7-8）式相应的表示式。这只需要在（7-8）式的指数项中，用 $M$ 代替 $m$，再减于（7-8）式，就可以得到，即有

$$\sum(p)=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dz[2m-(1-z)\gamma\cdot p]\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha}$$
$$\Big\{\exp\{i\alpha[z(1-z)p^2-(1-z)\lambda^2-zm^2]\}$$
$$-\exp\{i\alpha[z(1-z)p^2-(1-z)\lambda^2-zM^2]\}\Big\},$$

这个积分是有限的。应用公式

$$\int_0^\infty dx\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x}=\ln\frac{b}{a},$$

上式就成为

$$\sum(p)=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dz[2m-(1-z)\gamma\cdot p]\ln$$
$$\frac{zM^2+(1-z)\lambda^2-z(1-z)p^2}{zm^2+(1-z)\lambda^2-z(1-z)p^2}。\qquad(7\text{-}11)$$

当 $M$ 取有限值时，它是有限的。当 $M\to\infty$ 时，它是对数发散的，是（7-2）式表示的费米子自能部分。

把发散积分作成有限积分的极限，是正规化的一个重要步骤。正规化还要求把在极限情况下的有限部分和发散部分分离出来。如（7-11）式所示，$\sum(p)$ 是 $\gamma\cdot p$ 的函数。我们将它在 $\gamma\cdot p=m$ 的邻域展开，展开的第一项是

$$A=\sum(p)|_{\gamma\cdot p=m}=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz(1+z)m\ln\frac{zM^2}{z^2m^2}$$
$$=\frac{3\alpha m}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{5\alpha m}{8\pi},\qquad(7\text{-}12)$$

计算时，考虑到 $M^2 \gg m^2$，并令 $\lambda=0$。将 (7-11) 式对 $\gamma\cdot p$ 求导，并令 $\gamma\cdot p=m$，就得到展开第二项的系数

$$\mathrm{B}=\frac{\partial\sum(p)}{\partial\gamma\cdot p}\bigg|_{\gamma\cdot p=m}=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\Big\{(z-1)\ln\frac{zM^2}{z^2m^2}$$

$$+(1+z)m\left[\frac{2(z-1)m}{M^2}-\frac{2z(z-1)m}{z^2m^2+(1-z)\lambda^2}\right]\Big\}$$

$$=-\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}-\frac{3\alpha}{8\pi}+\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dz\frac{m^2(1-z^2)}{m^2z^2+\lambda^2(1-z)}。\quad(7\text{-}13)$$

余下的诸项之和，是

$$\sum\nolimits_f(p)=\sum(p)-A-(\gamma\cdot p-m)B\simeq$$

$$\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m-(1-z)\gamma\cdot p]\ln\frac{z^2m^2+(1-z)\lambda^2}{zm^2+(1-z)\lambda^2-z(1-z)p^2},\quad(7\text{-}14)$$

不含 $M$，是有限的。并且，当 $\gamma\cdot p=m$ 时，

$$\sum\nolimits_f(p)\sim(\gamma\cdot p-m)^2\sim0^2。\quad(7\text{-}15)$$

总括起来，我们得到正规化了的自能部分

$$\sum(p)=A+B(\gamma\cdot p-m)+\sum\nolimits_f(p)。\quad(7\text{-}16)$$

$A$、$B$ 如 (7-12) 式、(7-13) 式所示，是对数发散的。$\sum_f(p)$ 如 (7-14) 式、(7-15) 式所示，是有限的。

**重正化**　费米子的自能部分 $-i\sum(p)$，来自费米子的内线和外线。它的意义，也会在费米子内线或外线中显现出来。为了考察费米子自能的意义，论述处理发散常数的方法，我们计算链近似下的传播子，其费曼图是



相应的矩阵元是

$$S_f'(p)=S_f(p)+S_f(p)[-i\sum(p)]S_f(p)$$
$$+S_f(p)[-i\sum(p)]S_f(p)[-i\sum(p)]S_f(p)+\cdots\cdots$$

$$=S_f(p)\{1+[-i\Sigma(p)]S_f(p)$$
$$+[-i\Sigma(p)]S_f(p)[-i\Sigma(p)]S_f(p)+\cdots\cdots\},$$

利用级数公式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots,$$

链近似下的传播子就可以写成

$$S'_f(p)=S_f(p)\frac{1}{1+i\sum(p)S_f(p)},\tag{7-17}$$

把自由传播子

$$S_f(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m}$$

和 (7-16) 式表示的 $\sum(p)$ 代入 (7-17) 式,并令

$$\sum_f(p)=(\gamma\cdot p-m)C(p),\text{(P.287 (7-15))}\tag{7-18}$$

就得到

$$S'_f(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m-A-B(\gamma\cdot p-m)-C(\gamma\cdot p-m)}。\tag{7-19}$$

常数 $A$、$B$, 如 (7-12)式、(7-13) 式所示,

$$A、B\sim\alpha\ln\frac{M^2}{m^2}。$$

当 $M^2\to\infty$ 时, 是对数发散的。当 $M^2$ 是很大的有限值, 如 $M\sim m^{100}$ 时,

$$A、B\sim100\alpha,\ \alpha\sim1/137,$$

它仍然是一个小于 1 的值。在取极限以前, 我们就要把它消除掉,不让它产生坏的影响。

(7-19) 式中的质量$m$, 我们认为它不是测量到的费米子质量,而是所谓的裸质量。我们定义重正化质量为

$$m_\gamma=m+\delta m,\ \delta m=A,$$

并认为它是测量到的物理质量。这样, 就消除了发散常数$A$。而且, (7-19) 式就可以写成

$$S'_f(p) = \frac{i}{(\gamma\cdot p - m_\gamma)(1-B)(1-C)}\text{。} \tag{7-20}$$

这里认为：取极限以前，$A$、$B$、$C$ 都是小量。

(7-20) 式中的 $B$，在 $M^2\to\infty$ 时，是对数发散的，令

$$z_2 = (1-B)^{-1} \simeq 1 + B, \tag{7-21}$$

则链近似下的传播子可以写成

$$S'_f(p) = z_2 S^\gamma_f(p), \quad S^\gamma_f(p) = \frac{i}{\gamma\cdot p - m_\gamma - \sum_f(p)}, \tag{7-22}$$

$S^\gamma_f(p)$ 是有限的，叫做重正化的传播子。如 (7-21) 式所示，$z_2$ 是发散常数，人们称之为费米场的重正化常数。

$S^\gamma_f(p)$、$S'_f(p)$ 是动量空间的传播子。其傅立叶变换为

$$S^\gamma_f(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S^\gamma_f(p) e^{-ip(x-y)},$$

$$S'_f(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S'_f(p) e^{-ip(x-y)},$$

它们之间，应有如 (7-22) 式所示的关系

$$S'_f(x-y) = z_2 S^\gamma_f(x-y)\text{。}$$

按照传播子的定义

$$S'_f(x-y) = \langle 0|T\psi'(x)\bar{\psi}'(y)|0\rangle;$$

$$S^\gamma_f(x-y) = \langle 0|T\psi^\gamma(x)\,\bar{\psi}^\gamma(y)|0\rangle$$

可以推知

$$\psi'(x) = \sqrt{Z_2}\,\psi^\gamma(x), \quad \bar{\psi}'(x) = \sqrt{Z_2}\,\bar{\psi}^\gamma(x)\text{。} \tag{7-23}$$

这正是 $z_2$ 被称为费米场的重正化常数的原因。

动量空间的旋量波函数 $u(p, s)$，$\bar{u}(p, s)$，是时空波函数 $\psi(x)$ · $\bar{\psi}(x)$的平面波展开系数。因而，近似计算所得的外线因子$u'(p)$、$\bar{u}'(p)$，和重正化的外线因子 $u_\gamma(p)$、$\bar{u}_\gamma(p)$之间，应有如 (7-23) 式所示的相乘重正化关系

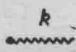
$$u'(p)=\sqrt{z_2}\,uu_r(p),\quad \overline{u'}(p)=\sqrt{z_2}\,\overline{u_r}(p)。\qquad (7\text{-}24)$$

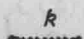
这是 (7-23) 式在动量表象中的表示。

## §2. 真 空 极 化

从狄拉克空穴理论的观点看来，真空是负能级都被填满、正能级全都空着的状态。换句话说，真空是正、反费米子相互抵消的状态。当存在电磁场时，真空会发生极化。从量子场论的观点看来，真空极化就是光子变成费米子对，费米子对又湮灭为光子的过程。光子有实光子和虚光子，它们以外线、内线的形式出现在费曼图中。

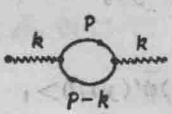
**极化部分** 简单的光子外线、内线为

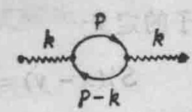


$e_\mu(k,\lambda)$；


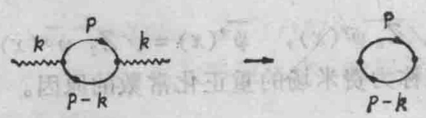
$\dfrac{-ig^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}$

由于真空极化效应，在最低阶近似下，它们将成为



；



截掉外腿后，留下的费米子闭合圈



(7-25)

叫做真空极化部分。相应的矩阵元是

$$ie^2\pi_{\mu\nu}(k)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{Tr})(-ie\gamma_\mu)\frac{i}{\gamma\cdot p-m+i\varepsilon}$$

$$(-ie\gamma_\nu)\frac{i}{\gamma\cdot(p-k)-m+i\varepsilon},\qquad (7\text{-}26)$$

$$\pi_{\mu\nu}(k)=i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{Tr}\gamma_\mu[\gamma\cdot p+m]\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k)+m]}{[p^2-m^2+i\varepsilon][(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]}。$$

按照求迹定理,被积函数中的分子

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[\gamma\cdot p+m]\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k)+m]\gamma_\mu\\&=\mathrm{Tr}[\gamma\cdot p\gamma_\nu\gamma\cdot(p-k)\gamma_\mu+m^2\gamma_\nu\gamma_\mu]\\&=4[p_\mu(p-k)_\nu+(p-k)_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}p\cdot(p-k)+g_{\mu\nu}m^2]\\&=4[2p_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-k_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)],\end{aligned}$$

代入上式,得

$$\pi_{\mu\nu}(k)=4i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{[2p_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-k_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)]}{[p^2-m^2+i\varepsilon][(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]}。\tag{7-27}$$

**分母的乘积化和** 来自传播子的分母的乘积因子，对积分不便,需要化成因子的和。把乘积因子化成因子的和,可以用上一节的方法进行,也可以用另外的方法进行。这里,我们利用公式

$$\frac{1}{A\cdot B}=\int_0^1\frac{dx}{[Ax+B(1-x)]^2}\tag{7-28}$$

进行。令

$$A=(p-k)^2-m^2+i\varepsilon,\ \ B=p^2-m^2+i\varepsilon,$$

$$Ax+B(1-x)=(p^2-2p\cdot k+k^2-m^2+i\varepsilon)x$$

$$+(p^2-m^2+i\varepsilon)(1-x)=p^2-2p\cdot kx-m^2+k^2x+i\varepsilon,$$

代入(7-28)式,再代入(7-27)式,得

$$\pi_{\mu\nu}(k)=4i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

$$\int_0^1dx\frac{[2p_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-k_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)]}{[p^2-2p\cdot kx-(m^2-k^2x)+i\varepsilon]^2}。\tag{7-29}$$

这种积分,在量子场论的圈图计算中,具有普遍意义。它们的特点是:分母为 $p^2-2p\cdot kx-\varDelta$ 的 $\alpha$ 次方;分子为 1、$p_\mu$、$p_\mu p_\nu$ 的形式,$p$ 是积分变量,$kx$、$\varDelta$ 是与积分变量无关的量。即在圈图计

算中，经常碰到费曼积分

$$F^{\alpha}(k,\Delta)=\int d^4p\,\frac{1}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}},$$

$$F^{\alpha}_{\mu}(k,\Delta)=\int d^4p\,\frac{p_{\mu}}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}},\tag{7-30}$$

$$F^{\alpha}_{\mu\nu}(k,\Delta)=\int d^4p\,\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}}。$$

(7-29)式就是它们的线性组合。

**维数正规化** 上列积分，是四维空间的四重积分。当积分限取 $p\to\infty$ 时，它们的分子分别以 $p^4$、$p^5$、$p^6\to\infty^4$、$\infty^5$、$\infty^6$ 的形式取极限；它们的分母则以 $p^{-2\alpha}\to\infty^{-2\alpha}$ 的形式取极限。所以，当 $\alpha\leqslant2$ 时，它们是发散的。当 $\alpha=2$ 时，它们分别是对数发散、线性发散、平方发散。(7-29)式就是这种情况。发散积分是没有意义的，需要正规化。正规化的方法有多种。前一节使用的是泡里-维勒斯的正规子方法。这里我们使用特荷夫-维特曼的维数正规化。

如(7-30)式所示的费曼积分的发散，是和时空空间的维数紧密相关的。时空空间是四维空间，费曼积分的发散，有如上所述的情况。如果时空空间不是四维的，而是$n$维的，费曼积分的发散情况，就会有所不同。例如 $n<4$ 时，积分就可能会是收敛的。特荷夫等已经证明，确实如此，选择适当的空间维数 $n$，积分就会是有限的。维数正规化，就是把费曼积分(7-30)式，看作$n$ 维有限积分的极限，即

$$F^{\alpha}(k,\Delta)=\int d^np\,\frac{1}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}},$$

$$F^{\alpha}_{\mu}(k,\Delta)=\int d^np\,\frac{p_{\mu}}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}},\tag{7-31}$$

$$F^{\alpha}_{\mu\nu}(k,\Delta)=\int d^np\,\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}}$$

是有限积分，(7-30) 式是它们在 $n=4$ 时的极限。

(7-31) 式中的三个积分，是相互关联的，

$$F_{\mu}^{\alpha}(k,\Delta)=\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial k_x^{\mu}}F^{\alpha-1}(k,\Delta), \tag{7-32}$$

$$F_{\mu\nu}^{\alpha}(k,\Delta)=\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial k_x^{\nu}}F_{\mu}^{\alpha-1}(k,\Delta)。$$

这些关系，可以由 (7-31) 式直接证明。这些告诉我们，需要深入研究的，只是 $F^{\alpha}(k,\Delta)$；得到 $F^{\alpha}(k,\Delta)$ 以后，由 (7-32) 式就可以得到 $F_{\mu}^{\alpha}(k,\Delta)$、$F_{\mu\nu}^{\alpha}(k,\Delta)$ 等。作积分变数变换

$$p\to l=(p-k_x),$$

(7-31) 式的第一式，就成为

$$F^{\alpha}(k,\Delta)=\int d^nl\frac{1}{[l^2-k_x^2-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}}。 \tag{7-33}$$

真实的四维空间，是闵可夫斯基空间。其度规张量为

$$g_{\mu\nu}=\mathrm{dig}[1,-1,-1,-1]。$$

dig 是对角的意思。在这空间的矢量

$$l^{\mu}=(l^0,\vec{l}),\quad \vec{l}=(l^1,l^2,l^3),$$

矢量的模和标积是

$$l^2=l_0^2-\vec{l}^{\,2},\quad l\cdot p=l_0p_0-\vec{l}\cdot\vec{p}。$$

用维数正规化方法时，时空空间是 $n$ 维的。其度规张量和矢量，也是 $n$ 维的，$g_{\mu\nu}$，$l^{\mu}$，$\mu=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$，且

$$g_{\mu\nu}=\mathrm{dig}[1,-1,\cdots\cdots,-1];$$

$$l^{\mu}=(l^0,\vec{l}),\quad \vec{l}=(l^1,l^2\cdots,l^{n-1}),$$

矢量的模和标积是

$$l^2=l_0^2-\vec{l}^{\,2},\quad \vec{l}^{\,2}=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_{n-1}^2,$$

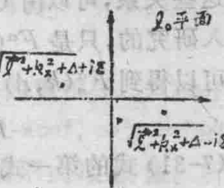
$$l\cdot p=l_0p_0-\vec{l}\cdot\vec{p},\quad \vec{l}\cdot\vec{p}=l_1p_1+l_2p_2+\cdots+l_{n-1}p_{n-1}。$$

闵可夫斯基空间，不管是四维的，还是 $n$ 维的，都是不定度规

的。其矢量的模$l^2=l_0^2-\vec{l}^{\,2}$可正、可负、可为零。这使在这空间的积分发生困难。

**威克转动** (7-33)式的积分，是 $n$ 维闵可夫斯基空间的积分。由于被积函数中的$l^2=l_0^2-\vec{l}^{\,2}$是不定度规的，难以积分。所以，用威克转动，使闵可夫斯基空间的积分，变成欧几里德空间的积分。考虑(7-33)式中对 $l_0$ 的积分，是 $l_0$ 平面沿实轴的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2-\vec{l}^{\,2}-k_x^2-\Delta+i\varepsilon]^\alpha},$$




被积函数在 $l_0$ 平面上有奇点，如图所示，为

$$l_0=\pm\left(\sqrt{\vec{l}^{\,2}+k_x^2+\Delta-i\varepsilon}\right),$$

这奇点在第二、第四象限。被积函数在第一、第三象限是解析的。而且，在无穷远处 $|l_0|\to\infty$ 时为零。因此，这沿实轴的积分，和沿虚轴的积分是相等的。即可以把积分路线转过 90° 以后，积分不变

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2-\vec{l}^{\,2}-k_x^2-\Delta+i\varepsilon]^\alpha}$$

$$=\int_{-i\infty}^{i\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2-\vec{l}^{\,2}-k_x^2-\Delta+i\varepsilon]^\alpha}。$$

这种转动叫做威克(*wick*)转动。再令

$$l_0=iL_0,\ \vec{l}=\vec{L},$$

则上式成为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2-\vec{l}^{\,2}-k_x^2-\Delta+i\varepsilon]^\alpha}$$

$$=i(-1)^\alpha\int_{-\infty}^{\infty} dL_0 \frac{1}{[L_0^2+\vec{L}^2+k_k^2+\Delta-i\varepsilon]^\alpha},$$

代入 (7-33) 式，得

$$F^{\alpha}(k,\Delta)=i(-1)^{\alpha}\int d^{n}L\frac{1}{[L^{2}+k_{s}^{2}+\Delta-i\varepsilon]^{\alpha}}。\qquad(7\text{-}34)$$

这积分是 $n$ 维欧几里德空间的积分。矢量的 模 $L^2=L_0^2+\vec{L}^2$。

在 $n$ 维欧几里德空间，采用球坐标时，体积元

$$d^{n}L=L^{n-1}dLd\Omega_{n},\qquad(7\text{-}35)$$

$L$是球的半径，变化区间是 $[0,\infty]$。$d\Omega_n$ 是 $n$ 维空间的立体角元

$$d\Omega_{n}=(\sin\theta_{n-1})^{n-2}d\theta_{n-1}(\sin\theta_{n-2})^{n-3}d\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_{2}d\theta_{2}d\theta_{1},$$

$$0\leqslant\theta_{1}\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\theta_{2},\cdots\theta_{n-2},\theta_{n-1}\leqslant\pi,$$

应用三角公式

$$\int_{0}^{\pi}\sin^{m}\theta d\theta=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+2)\right)},$$

$\Gamma(x)$ 是 $\Gamma$ 函数，有

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt;\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!;$$

$$\Gamma(1)=1;\qquad\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};\cdots\cdots$$

等性质。我们可以算出 $n$ 维空间的立体角

$$\int d\Omega_{n}=\int_{0}^{\pi}(\sin\theta_{n-1})^{n-2}d\theta_{n-1}\int_{0}^{\pi}(\sin\theta_{n-2})^{n-3}d\theta_{n-2}\cdots$$

$$\int_{0}^{\pi}\sin\theta_{2}d\theta_{2}\int_{0}^{2\pi}d\theta_{1}=\sqrt{\pi}^{\,n-2}\cdot2\pi\cdot\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-2+1)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-2+2)\right]}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-3+1)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-3+2)\right]}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+2)\right)},$$

$$\int d\Omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \tag{7-36}$$

把它们用于 (7-34) 式,得

$$F^{\alpha}(k,\Delta) = i(-1)^{\alpha}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{L^{n-1}dL}{[L^2+kx^2+\Delta-i\varepsilon]^{\alpha}},$$

而积分

$$\int_0^{\infty}\frac{L^{n-1}dL}{[L^2+kx^2+\Delta]^{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}.$$

把上述结果代入 (7-32) 式,就得到 (7-31) 式表示的费曼积分

$$F^{\alpha}(k,\Delta) = \int d^n p\frac{1}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}}$$

$$=(-1)^{\alpha}i\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}},$$

$$F^{\alpha}_{\mu}(k,\Delta) = \int d^n p\frac{p_{\mu}}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}}$$

$$=(-1)^{\alpha}i\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{k_{x\mu}}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}, \tag{7-37}$$

$$F^{\alpha}_{\mu\nu}(k,\Delta) = \int d^n p\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{[p^2-2p\cdot k_x-\Delta+i\varepsilon]^{\alpha}}$$

$$=(-1)^{\alpha}i\pi^{\frac{n}{2}}\Bigg[\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{k_{x\mu}k_{x\nu}}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}$$

$$-\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)}\frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}\Bigg]。$$

把 (7-29) 式表示的真空极化部份，用上述的维数正规化方法，使它正规化，即令

$$\pi_{\mu}(k)=4i\int_0^1 dx\int\frac{d^n p}{(2\pi)^4}$$

$$\frac{[2p_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-k_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)]}{[p^2-2p\cdot k_x-(m^2-k^2x)+i\varepsilon]^2},$$

把 (7-37) 式用于上式，得

$$\pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\frac{1}{2\pi^2}$$

$$\int_0^1 dx x(1-x)\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2x+k^2x^2)^{2-\frac{n}{2}}}。\tag{7-38}$$

当 $n\to 4$ 时，$\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\to\infty$，上式是发散的。我们要进一步把发散部份和有限部份分离开来。考虑到 $n\to 4$ 时

$$\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{2-\frac{n}{2}}\to\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\to\infty,$$

$$\frac{1}{[m^2-k^2x+k^2x^2]^{2-\frac{n}{2}}}$$

$$=\exp\left[-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln(m^2-k^2x+k^2x^2)\right]$$

$$\to\left[1-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln(m^2-k^2x+k^2x^2)\right],\tag{7-39}$$

$$\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{[m^2-k^2x+k^2x^2]^{2-\frac{n}{2}}}=\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\ln(m^2-k^2x+k^2x^2)。$$

为了便于和用其他正规化方法所得结果进行比较，令

$$\frac{1}{2-\frac{n}{2}}=\ln M^2, \tag{7-40}$$

当 $n\to4$ 和 $M^2\to\infty$ 时，它们有同样的极限。则

$$\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{[m^2-k^2x+k^2x^2]_{2-\frac{n}{2}}}=\ln\frac{M^2}{m^2}-\ln\left[1-\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right]。$$

把它代入 (7-38) 式，就得到正规化了的

$$\pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\frac{1}{2\pi^2}$$

$$\int_0^1 dxx(1-x)\left\{\ln\frac{M^2}{m^2}-\ln\left[1-\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right]\right\},$$

上式可以写成

$$\pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\pi(k^2),$$

$$\pi(k^2)=\pi(0)+\pi_e(k^2),$$

$$\pi(0)=\frac{1}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2}, \tag{7-41}$$

$$\pi_a(k^2)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dxx(1-x)\ln\left[1-\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right]$$

$$\simeq\frac{1}{60\pi^2}\frac{k^2}{m^2}。$$

后一等式是 $k^2\ll m^2$ 时的近似。

**重正化** 真空极化部份 $ie^2\pi_{\mu\nu}(k)$，来自光子的内线和外线。它们的意义，会在光子的内线和外线中显现出来。为了理

解它们的意义和处理它的发散部份，我们讨论链近似下的光子传播子。其费曼图和相应的矩阵元是



$$D'_{\mu\nu}(k)=D_{\mu\nu}(k)+D_{\mu\sigma}(k)ie^2\pi^{\sigma\rho}(k)D_{\rho\nu}(k)$$

$$+D_{\mu\sigma}(k)ie^2\pi^{\sigma\rho}(k)D_{\rho\lambda}(k)ie^2\pi^{\lambda s}(k)D_{s\nu}(k)+\cdots$$

$$=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie\pi\ \frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2}$$

$$+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie^2\pi^{\sigma\rho}\frac{-ig_{\rho\lambda}}{k^2}ie^2\pi^{\lambda s}\frac{-ig_{s\nu}}{k^2}+\cdots$$

$$=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie\pi^{\sigma\rho}\left[\frac{-ig_{\sigma\nu}}{k^2}\right.$$

$$\left.+\frac{ig^{\rho\lambda}}{k^2}ie^2\pi^{\lambda s}\frac{-ig_{s\nu}}{k^2}+\cdots\right]$$

$$=-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie^2\pi^{\sigma\rho}D'_{\rho\nu}(k)。$$

把 (7-41) 式代入上式，就得到链近似下光子传播子满足的方程

$$D'_{\mu\nu}(k)=-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2}$$

$$+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie^2(k^\sigma k^\rho-g^{\sigma\rho}k^2)\pi(k^2)D'_{\rho\nu}(k)。\qquad(7\text{-}42)$$

从张量分析考虑，$D'_{\mu\nu}(k)$ 是由 $g_{\mu\nu}$、$k_\mu k_\nu$ 构成的二阶张量，一般形式应该是

$$D'_{\mu\nu}(k)=A(k^2)g_{\mu\nu}+B(k^2)k_\mu k_\nu,\qquad(7\text{-}43)$$

代入上式，得 $A$、$B$ 满足的方程

$$Ag_{\mu\nu}+Bk_\mu k_\nu=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}$$

$$+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie^2(k^\sigma k^\rho-g^{\sigma\rho}k^2)\pi(k^2)(Ag_{\rho\nu}+Bk_\rho k_\nu)$$

$$=\frac{-ig_\mu}{k^2}+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie^2\pi(k^2)[Ak^\sigma k-g^\sigma_\nu Ak^2]$$

$$=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{e^2\pi(k^2)}{k^2}[Ak_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}Ak^2],$$

$$g_{\mu\nu}\left[A+e^2\pi(k^2)A+\frac{i}{k^2}\right]+k_\mu k_\nu\left[B-A\frac{e^2\pi(k^2)}{k^2}\right]=0$$

$g_{\mu\nu}$、$k_\mu k_\nu$ 是独立的二阶张量，上式要求

$$A=\frac{-i}{k^2(1+e^2\pi(k^2))},$$

$$B=\frac{-ie^2\pi(k^2)}{k^4(1+e^2\pi(k^2))},\tag{7-44}$$

代入 (7-43) 式，得

$$D'_{\mu\nu}(k)=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2(1+e^2\pi(k^2))}+\frac{-ie^2\pi(k^2)k_\mu k_\nu}{k^4(1+e^2\pi(k^2))}。$$

实际上，光子传播子总是和费米子流相联系的，而流守恒 $k_\mu j^\mu=0$，使上式的第二项不发生作用。因此，有作用的链近似的光子传播子为

$$D'_{\mu\nu}(k)=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2(1+e^2\pi(k^2))}。\tag{7-45}$$

由于 $e^2/4\pi\sim1/137$ 是一个小量，$e^2\pi(0)$ 和 $e^2\pi_c(k^2)$ 就也都是小量，故有

$$\begin{aligned}1+e^2\pi(k^2)&=1+e^2\pi(0)+e^2\pi_c(k^2)\\&=(1+e^2\pi(0))(1+e^2\pi_c(k^2)),\end{aligned}$$

上式就可以写成

$$D'_{\mu\nu}(k)=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2(1+e^2\pi(0))(1+e^2\pi_c(k^2))}。$$

令

$$Z_3 = \frac{1}{1+e^2\pi(0)} = 1 - e^2\pi(0), \tag{7-46}$$

则镭近似下的光子传播子就成为

$$D'_{\mu\nu}(k) = Z_3 D^r_{\mu\nu}(k),$$

$$D^r_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2(1+e^2\pi_e(k^2))}。\tag{7-47}$$

这表明：光子传播子是相乘重正化的。$Z_3$ 是发散常数，叫做玻色场的重正化常数。$D^r_{\mu\nu}(k)$ 是有限的，叫做重正化的光子传播子。

上述传播子是动量表象中的传播子。其傅立叶变换

$$D'_{\mu\nu}(x-y) = \int d^4k D'_{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-y)},$$

$$D^r_{\mu\nu}(x-y) = \int d^4k D^r_{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-y)},$$

类似坐标表象中的传播子，和 (7-47) 式相应，有

$$D'_{\mu\nu}(x-y) = Z_3 D^r_{\mu\nu}(x-y)。$$

另一方面，按照传播子的定义，有

$$D'_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|TA'_\mu(x)A'_\nu(y)|0\rangle,$$

$$D^r_{\mu}(x-y) = \langle 0|TA^r_\mu(x)A^r_\nu(x)|0\rangle,$$

由此可知，光子场量也是相乘重正化的，

$$A'_\mu(x) = \sqrt{Z_3}\, A^r_\mu(x), \tag{7-45}$$

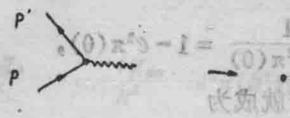
这正是 $Z_3$ 被称为光子场量重正化常数的由来。

## §3. 顶 角 因 子

费曼图中的基本元件是内线、外线和顶角。在量子色动力学中，相互作用哈密顿密度是

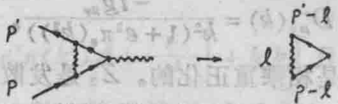
$$\mathscr{H}_i(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)$$

时，内线，外线有费米子线和光子线。最简单的顶角是




$-ie\gamma_\mu$

高一阶的顶角是




$-ie\Lambda_\mu(p',p),$

与之相应的矩阵是

$$\Lambda_\mu(p',p)=\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\ \frac{-ig^{\nu\lambda}}{l^2-\lambda^2+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p'-l)-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\gamma\cdot(p-l)-m+i\varepsilon}(-ie\gamma_\lambda),$$

$$\Lambda_\mu(p',p)=-ie^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}$$

$$\frac{\gamma_\nu[\gamma\cdot(p'-l)+m]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-l)+m]\gamma^\nu}{[l^2-\lambda^2+i\varepsilon][(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon][(p-l)^2-m^2+i\varepsilon]}。\tag{7-49}$$

分子上的夹积因子，根据定理五（5-83）式，可以简化为

$$\begin{aligned}N&=\gamma_\nu[\gamma\cdot(p'-l)+m]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-l)+m]\gamma_\nu\\&=\gamma_\nu[\gamma(p'-l)\gamma_\mu\gamma\cdot(p-l)+m\gamma\cdot(p'-l)\gamma_\mu\\&\quad+m\gamma_\mu\gamma\cdot(p-l)+m^2\gamma_\mu]\gamma^\nu\\&=-2\gamma\cdot(p-l)\gamma_\mu\gamma\cdot(p'-l)\\&\quad+4m(p'-l)_\mu+4m(p-l)_\mu-2m^2\gamma_\mu\\&=-2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot l\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot l-4\gamma\cdot ll_\mu\\&\quad+2l^2\gamma_\mu+4m(p'+p-2l)_\mu-2m^2\gamma_\mu。\end{aligned}$$

它们是被积函数 $l$ 的二次、一次、零次项

$$N=2l^2\gamma_\mu-4\gamma\cdot ll_\mu+2\gamma\cdot l\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot l-8ml_\mu$$

$$-2\gamma p\gamma_\mu\gamma\cdot p' + 4m(p'+p)_\mu - 2m^2\gamma_\mu。\tag{7-50}$$

**正规化** (7-49) 式是 $l$ 的四重积分，分子 $N\sim l^2$，分母 $D\sim l^6$。当 $l\to\infty$ 时，它是对数发散的。所以，需要正规化。前两节使用的正规化方法，是泡里-维勒斯的正规子方法和特荷夫的维数正规化。这里，我们用费曼(Feynman)的截割方法。这方法和泡里-维勒斯的正规子方法是类似的。它使用玻色子作为正规子，即作代换

$$\frac{1}{l^2-\lambda^2+i\varepsilon}\to\frac{1}{l^2-\lambda^2+i\varepsilon}-\frac{1}{l^2-M^2+i\varepsilon}$$

$$=\frac{(\lambda^2-M^2)}{[l^2-\lambda^2+i\varepsilon][l^2-M^2+i\varepsilon]}。\tag{7-51}$$

显然，在 $M^2\to\infty$ 时，它就是质量为 $\lambda$ 的玻色子传播子。把它代入 (7-49) 式，得

$$\Lambda_\mu(p',p)=-ie^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}$$

$$\frac{(\lambda^2-M^2)N}{[l^2-\lambda^2+i\varepsilon][l^2-M^2+i\varepsilon][(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon][(p-l)^2-m^2+i\varepsilon]},\tag{7-52}$$

$N$ 如 (7-50) 式所示。这个积分，当 $M^2$ 取有限值时，是有限的。

**分母积化和** (7-52) 式中的分母是四个因子的乘积，积分不便。我们利用公式

$$\frac{1}{A^mB^n}=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\int_0^1dx\,\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[Ax+B(1-x)]^{m+n}}\tag{7-53}$$

把它们化成因子的和。把 (7-52) 式中的四个因子，依次使用上式，得

$$\frac{1}{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon][(p-l)^2-m^2+i\varepsilon]}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+i\varepsilon](1-x)\}^2},$$

$$\frac{1}{\{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2-i\varepsilon](1-x)\}^2[l^2-\lambda^2+i\varepsilon]}$$

$$=\int_0^1 \frac{2y\,dy}{(\{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+i\varepsilon](1-x)\}y+[l^2-\lambda^2+i\varepsilon](1-y))^3}.$$

$$\frac{1}{(\{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+i\varepsilon](1-x)\}y+[l^2-\lambda^2+i\varepsilon](1-y))^3[l^2-m^2+i\varepsilon]}$$

$$=\int_0^1 \frac{3z^2dz}{\{(\{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+i\varepsilon](1-x)\}y+[l^2-\lambda^2+i\varepsilon](1-y))z+[l^2-M^2+i\varepsilon](1-z)\}^4},$$

$$\frac{1}{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon][(p-l)^2-m^2+i\varepsilon][l^2-\lambda^2+i\varepsilon][l^2-M^2+i\varepsilon]}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx\,2y\,dy\,3z^2dz}{\{(\{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+i\varepsilon](1-x)\}y+[l^2-\lambda^2+i\varepsilon](1-y))z+[l^2-M^2+i\varepsilon](1-z)\}^4},$$

代入 (7-52) 式，得

$$\Lambda_\mu(p',p)=-ie^2\int_0^1 dx\int_0^1 2y\,dy\int_0^1 3z^2dz\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{(\lambda^2-M^2)N}{D^4},$$

$$\begin{aligned}D&=(\{[(p'-l)^2-m^2+i\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+i\varepsilon](1-x)\}y\\&\quad+[l^2-\lambda^2+i\varepsilon](1-y))z+[l^2-M^2+i\varepsilon](1-z)\\&=(\{l^2-2l\cdot[p'x+p(1-x)]-m^2+p'^2x+p^2(1-x)\\&\quad+i\varepsilon\}y+[l^2-\lambda^2+i\varepsilon](1-y))z+[l^2-M^2+i\varepsilon](1-z)\\&=(l^2-2l\cdot[p'xy+p(1-x)y]-m^2y+p'^2xy+p^2(1-x)y\\&\quad-\lambda^2(1-y)+i\varepsilon)z+(l^2-M^2+i\varepsilon)(1-z),\end{aligned}$$

$$D=l^2-2l\cdot[p'xyz+p(1-x)yz]+p'^2xyz+p^2(1-x)yz$$

$$-m^2yz-\lambda^2(1-y)z-M^2(1-z)+i\varepsilon。$$

令

$$k_z=p'xyz+p(1-x)yz, \tag{7-54}$$

$$\Delta=m^2yz+\lambda^2(1-y)z+M^2(1-z)$$

$$-p'^2xyz-p^2(1-x)yz,$$

则

$$D=l^2-2l\cdot k_z-\Delta+i\varepsilon,$$

$$\Lambda_\mu(p',p)=-ie^2(\lambda^2-M^2)\int_0^1dx\int_0^1 2ydy\int_0^1 3z^2dz\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}$$

$$\cdot\frac{2\gamma_\mu l^2-4\gamma\cdot ll_\mu+2\gamma\cdot l\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot l-8ml_\mu+Q_\mu}{[l^2-2l\cdot k_z-\Delta+i\varepsilon]^4}, \tag{7-55}$$

$$Q_\mu=4m(p'+p)_\mu-2m^2\gamma_\mu-2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot p'。$$

上式中对 $l$ 的积分是有限的，可以用(7-37)式进行。在(7-37)式中，令 $n=4$，$\alpha=4$，则

$$F^4(k,\Delta)=\int d^4l\frac{1}{[l^2-2l\cdot k_z-\Delta+i\varepsilon]^4}$$

$$=i\pi^2\frac{1}{6}\frac{1}{(\Delta+k_z^2)^2},$$

$$F_\mu^4(k,\Delta)=\int d^4l\frac{l_\mu}{[l^2-2l\cdot k_z-\Delta+i\varepsilon]^4}$$

$$=i\pi^2\frac{1}{6}\frac{k_{z\mu}}{(\Delta+k_z^2)^2},$$

$$F_{\mu\nu}^4(k,\Delta)=\int d^4l\frac{l_\mu l_\nu}{[l^2-2l\cdot k_z-\Delta+i\varepsilon]^4}$$

$$=i\pi^2\left[\frac{1}{6}\frac{k_{z\mu}k_{z\nu}}{(\Delta+k_z^2)^2}-\frac{1}{12}\frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+k_z^2)}\right],$$

$$\int d^4l\frac{2\gamma_\mu l^2-4\gamma^\nu l_\mu l_\nu+2\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma\cdot p'l_\nu+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma^\nu l_\nu-8mg_\mu^\nu l_\nu+Q_\mu}{[l^2-2l\cdot k_z-\Delta+i\varepsilon]^4}$$

$$= i\pi^2 \frac{1}{6} \frac{1}{(\Delta + k_z^2)^2} Q_\mu$$

$$+ i\pi^2 \frac{1}{6} \frac{k_{z\nu}}{(\Delta + k^2)^2} [2\gamma^\nu \gamma_\mu \gamma \cdot p' + 2\gamma \cdot p \gamma_\mu \lambda^\nu - 8m g_\mu^\nu]$$

$$+ i\pi^2 \left[ \frac{1}{6} \frac{2\gamma_\mu k_z^2 - 4\gamma^\nu k_{z\mu} k_{z\nu}}{(\Delta + k_z^2)^2} - \frac{1}{12} \frac{8\gamma_\mu - 4\gamma_\mu}{\Delta + k_z^2} \right]$$

$$= \frac{i\pi^2}{6(\Delta + k_z^2)^2} [Q_\mu + 2\gamma \cdot k_z \gamma_\mu \gamma \cdot p' + 2\gamma \cdot p \gamma_\mu \gamma \cdot k_z - 8m k_{z\mu}$$

$$+ 2\gamma_\mu k_z^2 - 4\gamma \cdot k_z k_{z\mu}] - \frac{i\pi^2 \gamma_\mu}{3(\Delta + k_z^2)}。 \tag{7-56}$$

把 (7-56) 式代入 (7-55) 式，得

$$\Lambda_\mu(p', p) = \frac{e^2(\lambda^2 - M^2)}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \int_0^1 z^2 dz$$

$$\left[ \frac{Q_\mu + 2\gamma \cdot k_z \gamma_\mu \gamma \cdot p' + 2\gamma \cdot p \gamma_\mu \gamma \cdot k_z - 8m k_{z\mu} + 2\gamma_\mu k_z^2 - 4\gamma \cdot k_z k_{z\mu}}{(\Delta + k_z^2)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2\gamma_\mu}{\Delta + k_z^2} \right],$$

$$k_z = p' xyz + p(1 - x) yz, \tag{7-57}$$

$$\Delta = m^2 yz + \lambda^2 (1 - y) z + M^2 (1 - z) - p'^2 xyz - p^2 (1 - x) yz,$$

$$Q_\mu = 4m(p' + p)_\mu - 2m^2 \gamma_\mu - 2\gamma \cdot p \gamma_\mu \gamma \cdot p'。$$

由于 $M^2 \gg m^2$、$\lambda^2$、$p^2$和$p'^2$，被积函数中的分母

$$\begin{aligned}
\Delta + k_z^2 &= m^2 yz + \lambda^2 (1 - y) z + M^2 (1 - z) - p'^2 xyz \\
&\quad - p^2 (1 - x) yz + [p' xyz + p(1 - x) yz]^2 \\
&\simeq (1 - z) M^2 + m^2 y + \lambda^2 (1 - y) - p'^2 xy \\
&\quad - p^2 (1 - x) y + [p' xy + p(1 - x) y]^2 \\
&= (1 - z) M^2 + m^2 y + \lambda^2 (1 - y) - p'^2 xy(1 - y) \\
&\quad - p^2 (1 - x) y(1 - y) - (p' - p)^2 x(1 - x) y^2,
\end{aligned}$$

$$\Delta + k_z^2 = (1 - z) M^2 + A, \tag{7-58}$$

$$A = m^2 y + \lambda^2 (1 - y) - p'^2 xy(1 - y)$$

$$- p^2(1-x)y(1-y) - (p'-p)^2 x(1-x)y^2。$$

$A$ 中不含 $z$，且当 $p^2 = p'^2 = m^2$，$p' = p$ 时，为

$$A_0 = m^2 y^2 + \lambda^2(1-y)。\tag{7-59}$$

把 (7-58) 式代入 (7-57) 式，计算对 $z$ 的积分，第二项有

$$I_1 = -2\gamma_\mu(\lambda^2 - M^2)\int_0^1 z^2 dz \frac{1}{(1-z)M^2 + A}$$

$$= -2\gamma_\mu \int_0^1 dz \frac{(\lambda^2 - M^2)}{zM^2 + A}(1-z)^2$$

$$\simeq 2\gamma_\mu \int_0^1 dz \frac{1 - 2z + z^2}{z + \frac{A}{M^2}}$$

$$\simeq 2\gamma_\mu \int_0^1 dz \left[\frac{1}{z + \frac{A}{M^2}} - 2 + z\right]$$

$$= 2\gamma_\mu\left[\ln\left(z + \frac{A}{M^2}\right)\Big|_0^1 - 2 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\gamma_\mu\left[\ln M^2 - \ln A - \frac{3}{2}\right],$$

$$I_1 = 2\gamma_\mu\left[\ln M^2 - \ln A - \frac{3}{2}\right]。\tag{7-60}$$

(7-57) 式中的第一项有

$$I_2 = (\lambda^2 - M^2)\int_0^1 dz \cdot z^2$$

$$\frac{Q_\mu + z2\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p' + z2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k - z8mk_\mu + z^2 2\gamma_\mu k^2 - z^2 4\gamma\cdot kk_\mu}{[(1-z)M^2 + A]^2}$$

$$I_2 = (\lambda^2 - M^2)\int_0^1 dz \frac{(1-z)^2}{[zM^2 + A]^2}$$

$$[Q_\mu + (1-z)(2\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p' + 2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k - 8mk_\mu)$$

$$+ (1-z)^2(2\gamma_\mu k^2 - 4\gamma\cdot kk_\mu)]$$

$$= (\lambda^2 - M^2)\int_0^1 dz\left(\frac{d}{dz}\,\frac{1}{zM^2+A}\right)_{-M^2}^{(1-z)^2}$$

$$[Q_\mu + (1-z)(2\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p' + 2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k - 8mk_\mu)$$

$$+ (1-z)^2(2\gamma_\mu k^2 - 4\gamma\cdot kk_\mu)]$$

$$= \left\{\frac{(1-z)^2}{zM^2+A}[Q_\mu + (1-z)(2\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p' + 2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k - 8mk_\mu)\right.$$

$$\left. + (1-z)^2(2\gamma_\mu k^2 - 4\gamma\cdot kk_\mu)]\right\}_0^1 - \int_0^1 dz\frac{1}{zM^2+A}\,\frac{d}{dz}$$

$$\{(1-z)^2[Q_\mu + (1-z)(2\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p' + 2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k - 8mk_\mu)$$

$$+ (1-z)^2(2\gamma_\mu k^2 - 4\gamma\cdot kk_\mu)\},$$

$$I_2 = -\frac{Q_\mu + 2\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p' + 2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k - 8mk_\mu + 2\gamma_\mu k^2 - 4\gamma\cdot kk_\mu}{A}$$

$$+ O\left(\frac{\ln M^2}{M^2}\right)。 \tag{7-61}$$

把 (7-60) 式、(7-61) 式代入 (7-57) 式，得

$$\Lambda_\mu(p',p) = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^1 ydy\left[2\gamma_\mu\left(\ln M^2 - \ln A - \frac{3}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\begin{matrix}2m^2\gamma_\mu + 2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot p' - 4m(p'+p)_\mu - 2\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p' \\ - 2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k + 8mk_\mu - 2\gamma_\mu k^2 + 4\gamma\cdot kk_\mu\end{matrix}}{A}\right], \tag{7-62}$$

$$A = m^2 y + \lambda^2(1-y) - p'^2 xy(1-y)$$

$$- p^2(1-x)y(1-y) - (p'-p)^2 x(1-x)y^2。$$

把包含 $M$ 的项，即所谓紫外发散的项，分离出来，令

$$L\gamma_\mu = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^1 ydy\,2\gamma_\mu(\ln M^2 - \ln m^2)$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}\cdot\gamma_\mu,$$

剩下的是包含 $\lambda$ 的项，即无紫外发散有红外发散的项，

$$\Lambda_{c\mu}(p',p) = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^1 ydy\left[2\gamma_\mu\ln\frac{m^2}{A} - 3\gamma_\mu\right.$$

$$+\frac{\begin{array}{c}2m^2\gamma_\mu+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot p'-4m(p'+p)_\mu-2\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'\\ -2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k+8mk_\mu-2\gamma_\mu k^2+4\gamma kk_\mu\end{array}}{A}\Bigg],$$

计算是烦难的。在 $|p'-p|^2\ll m^2$ 时，它近似为

$$\Lambda_{c\mu}(p',p)=\gamma_\mu\frac{\alpha}{3\pi}\ \frac{(p'-p)^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right)$$

$$+\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot(p'-p),\gamma_\mu]。$$

综上所述，我们得到单圈计算的顶角因子

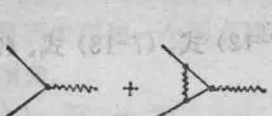
$$\Lambda_\mu(p',p)=L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p), \tag{7-63}$$

$$L=\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2},$$

$$\Lambda_{c\mu}(p',p)=\gamma_\mu\frac{\alpha}{3\pi}\ \frac{(p'-p)^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right)$$

$$+\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot(p'-p),\gamma_\mu]。$$

**重正化** 顶角因子来自顶角，它的意义会在顶角中显现出来。单圈近似下的顶角是



$-ie\gamma_\mu+-ie\Lambda_\mu$

即代替树图近似下的 $\gamma_\mu$，取

$$\Gamma'_\mu(p',p)=\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p',p),$$

如 (7-63) 式所示，当 $M^2$ 和 $\lambda$ 都取有限值时，$L$ 和 $\Lambda_{c\mu}$ 都和 $\alpha$ 成比例，都是小于 1 的量，因而

$$\gamma_\mu+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}=(1+L)(\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}),$$
$$\Gamma'_\mu(p',p)=(1+L)(\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu})。$$

令

$$Z_1=(1+L)^{-1}=1-L, \tag{7-64}$$
$$\Gamma^{\gamma}_{\mu}(p',p)=\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p),$$
则顶角取相乘重正化的形式

$$\Gamma'_{\mu}(p',p)=\frac{1}{Z_1}\Gamma^{\gamma}_{\mu}(p',p)。 \tag{7-65}$$

$Z_1$ 是发散的,叫做顶角重正化常数。$\Gamma^{\gamma}_{\mu}(p',p)$ 是有限的,叫做重正化的顶角。

## §4. 电荷重正化和华德等式

在量子电动力学中,有三个基本的单圈图

 $=-i\Sigma(p)$;  $=ie^2\pi_{\mu\nu}(k)$;

(7-66)

 $=-ie\Lambda_\mu(p',p)$。

计算的结果,如 (7-16) 式、(7-12) 式、(7-13) 式、(7-14) 式、(7-41)式、(7-63) 式所示,是

$$\Sigma(p)=A+B(\gamma\cdot p-m)+\Sigma_f(p),$$

$$A=\frac{3\alpha m}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}, \quad B=-\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2},$$

$$\Sigma_f(p)\sim(\gamma\cdot p-m)^2,$$

$$\pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)(\pi(0)+\pi_e(k^2)),$$

$$e^2\pi(0)=\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}, \quad e^2\pi_e(k^2)=\frac{\alpha}{15\pi}\ \frac{k^2}{m^2}, \tag{7-67}$$

$$\Lambda_\mu(p',p)=L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)$$

$$L = \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{M^2}{m^2},$$

$$\Lambda_{c\mu}(p';p) = \gamma_\mu \frac{\alpha}{3\pi} \frac{(p'-p)^2}{m^2} \left( \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right)$$

$$+ \frac{\alpha}{8\pi m} [\gamma \cdot (p'-p), \gamma_\mu]。$$

有四个发散常数 $A$、$B$、$e^2\pi(0)$、$L$，它们都比例于 $\alpha = 1/137$。当 $M^2$ 取物理上有限的大质量值时，都是小于1的量。当 $M^2 \to \infty$ 时，它们都是对数发散的。

其中的 $A$，通过质量重正化

$$m_r = m + \delta m, \quad \delta m = A \tag{7-68}$$

而去除。在拉格朗日密度中，费米子的质量项为

$$-m\bar{\psi}\psi = -(m_r - \delta m)\bar{\psi}\psi,$$

这表明：用重正化质量 $m_r$ 代替裸质量 $m$ 时，在拉格朗日密度中，就多了一项 $\delta m\,\bar{\psi}\psi$。换句话说，把 $-m_r\bar{\psi}\psi$ 看作质量项时，$\delta m\,\bar{\psi}\psi$ 就成为附加的相互作用拉格朗日密度

$$\mathscr{L}_i \sim \delta m\,\bar{\psi}\psi。$$

这使费曼图中附加一个两点顶角，即附加一个与两根费米子线相连的顶角。

 $, \; i\delta m$ (7-69)

因而按照费曼规则，计算 $S$ 矩阵之时，用重正化质量 $m_r$ 取代裸质量 $m$，就需要考虑这一附加顶角。

其它的三个发散常数 $B$、$e^2\pi(0)$、$L$，如 (7-21) 式、(7-22) 式、(7-23) 式、(7-46) 式、(7-47) 式、(7-48) 式、(7-64) 式、(7-65) 式所示，

$$Z_2 = 1 + B,$$

$$S'_f(p)=Z_2S^r_f(p),\quad u'(p,s)=\sqrt{Z_2}\,u^r(p,s),$$

$$Z_3=1-e^2\pi(0), \tag{7-70}$$

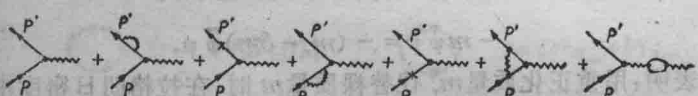
$$D'_{\mu\nu}(k)=Z_3D^r_{\mu\nu}(k),\quad e'_\mu(k,\lambda)=\sqrt{Z_3}\,e^r_\mu(k,\lambda),$$

$$Z_1=1-L,$$

$$\Gamma'_\mu(p',p)=Z_1^{-1}\Gamma^r_\mu(p'p),$$

代之以三个重正化常数$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$。它们以相乘重正化的形式，出现在传播子、外线和顶角中。换句话说、它们成为传播子、外线和顶角的发散因子。这有利于进一步处理。

**电荷重正化** 实际上，三个重正化常数$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$，通过电荷重正化，可以去除。为此，我们讨论一个电子演化为光子和电子的过程。在单圈近似下，其费曼图是



与之相应的$S$矩阵元是

$$\begin{aligned}S_{fi}=&\bar{u}(p',s')(-ie)[\gamma_\mu-i\Sigma(p')S_f(p')\gamma_\mu\\&+i\delta mS_f(p')\gamma_\mu+\gamma_\mu S_f(p)(-i\Sigma(p))+\gamma_\mu S_f(p)i\delta m\\&+\Lambda_\lambda(p',p)+\gamma_\nu D^{\nu\lambda}(k)ie^2\pi_{\lambda\mu}(k)]u(p,s)e^\mu(k,\lambda)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\bar{u}(p',s')(-ie)\Big[\gamma_\mu-i(A+B(\gamma\cdot p-m)+\Sigma_f(p'))\\&\frac{1}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu+i\delta m\frac{1}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu\\&+\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot p-m}(-i)(A+B(\gamma\cdot p-m)+\Sigma_f(p))\\&+\gamma_\mu\frac{i}{\gamma\cdot p-m}i\delta m+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)\\&+\gamma_\nu\frac{-ig^{\nu\lambda}}{k^2}ie^2(k_\mu k_\lambda-g_{\lambda\mu}k^2)(\pi(0)\end{aligned}$$

$$+\pi_e(k^2)\,)\Big]u(p,s)e^{\mu}(k,\lambda),$$

由于

$$A=\delta m,\ \ \Sigma(p)u(p)\sim(\gamma\cdot p-m^2)u(p)=0,$$

$$\overline{u}(p')r_{\bullet}(p'-p)u(p)=0,$$

上式成为

$$S_{f_1}=\overline{u}(p',s')(-ie)\Big[\gamma_\mu+B(\gamma\cdot p'-m)\frac{1}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu$$

$$+\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot p-m}(\gamma\cdot p-m)B+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)$$

$$-\gamma_\mu\frac{e^2}{k^2}k^2(\pi(0)+\pi_e(k^2))\Big]u(p,s)e^{\mu}(k,\lambda)。$$

当 $p'=p$，$k=0$，$\gamma_{\bullet}p=\gamma\cdot p'=m$ 时，

$$\Lambda_{c\mu}(p,p)=0,\ \ \pi_e(0)=0,$$

$$\overline{u}(p',s')B(\gamma\cdot p'-m)\frac{1}{(\gamma\cdot p'-m)}=\begin{cases}0\\ \overline{\mu}(p',s)'B,\end{cases}$$

$$\frac{1}{\gamma\cdot p-m}(\gamma\cdot p-m)Bu(p,s)=\begin{cases}0\\ Bu(p,s),\end{cases}$$

$$\frac{1}{k^2}k^2\pi(0)e^{\mu}(k,\lambda)=\begin{cases}0\\ \pi(0)e^{\mu}(k,\lambda)。\end{cases}$$

后三式是不定式。考虑到场量的重正化，

$$u'=\sqrt{Z_2}\,u=\sqrt{1+B}\,u=(1+\frac{1}{2}B)u,$$

$$e'_\mu=\sqrt{Z_3}\ e_\mu=\sqrt{1-e^2\pi(0)}\ e_\mu=(1-\frac{1}{2}e^2\pi(0))e_\mu。$$

可以把以上不定式定下来，取

$$\overline{u}(p',s')B\frac{\gamma\cdot p'-m}{\gamma\cdot p-m}=\overline{u}(p',s')\frac{B}{2},$$

$$\frac{\gamma\cdot p-m}{\gamma\cdot p-m}Bu(p,s)=\frac{B}{2}u(p,s),$$

$$\frac{k^2}{k^2}\pi(0)e^{\mu}(k,\lambda)=\frac{\pi(0)}{2}e^{\mu}(p,\lambda),$$

则上式矩阵元为

$$S_{fi}=\overline{u}(p',s')(-ie)[\gamma_\mu+B\gamma_\mu+L\gamma_\mu$$

$$-\frac{1}{2}\pi(0)\gamma_\mu]u(p,s)e^{\mu}(k,\lambda)$$

$$=\overline{u}(p',s')(-ie)\gamma_\mu[1+B+L$$

$$-\frac{1}{2}\pi(0)]u(p,s)e^{\mu}(k,\lambda)。$$

当 $M^2$ 取物理有限大时，$B$、$L$、$\pi(0)$ 都是小于 1 的量。

$$1+B+L-\frac{1}{2}\pi(0)=(1+B)(1+L)\left(1-\frac{1}{2}\pi(0)\right)$$

$$=Z_2\cdot Z_1^{-1}\cdot\sqrt{Z_3},$$

$$S_{fi}=\overline{u}(p',s')(-ieZ_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}\,\gamma_\mu)u(p,s)e^{\mu}(p'-p,\lambda)。$$

定义重正化电荷

$$e_r=eZ_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}, \tag{7-71}$$

则 $S$ 矩阵元就成为

$$S_{fi}=\overline{u}(p',s')(-ie_r\gamma_\mu)u(p,s)e^{\mu}(p'-p,\lambda)。$$

把 $e_r$ 看作实验上测量到的有限值，上式就是有限的了。这样，通过电荷重正化，我们就消除了三个重正化常数 $Z_1$、$Z_2$、$Z_3$，它们被裸电荷 $e$ 吸收掉了。

**华德等式** 如 (7-67) 式所示，电子自能中出现的发散常数 $B$，和顶角因子中出现的发散常数 $L$ 等值异号

$$L=\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}=-B,$$

由于 (7-70) 式中的

$$Z_2 = 1 + B, \qquad Z_1 = 1 - L,$$

就导致

$$Z_1 = Z_2, \tag{7-72}$$

这是华德等式的结果。它使三个重正化常数 $Z_1$、$Z_2$ $Z_3$，只剩下两个独立的了，使重正化理论大大简化。

电子的自能部分和顶角因子，在单圈近似下，如 (7-66) 式所示，

$$-i\Sigma(p) = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{l^2-\lambda^2+i\varepsilon}(-ie\gamma_\mu)$$

$$\frac{1}{\gamma\cdot(p-l)-m+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu),$$

$$\Lambda_\mu(p',p) = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\nu\lambda}}{l^2-\lambda^2+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p'-l)-m+i\varepsilon}\gamma_\mu \frac{i}{\gamma\cdot(p-l)-m+i\varepsilon}(-ie\gamma_\lambda)。$$

取 $\Sigma(p)$ 对 $p^\mu$ 的微商，得

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p) = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\nu\lambda}}{l^2-\lambda^2+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p-l)-m+i\varepsilon}\gamma_\mu \frac{-i}{\gamma\cdot(p-l)-m+i\varepsilon}(-ie\gamma_\lambda)。$$

与 $\Lambda_\mu(p',p)$ 比较，得

$$\Lambda_\mu(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p)。 \tag{7-73}$$

这是华德 (Ward) 在 1950 年就发现了的等式，叫做华德等式。取 (7-73) 式的矩阵元

$$\bar{u}(p,s)\Lambda_\mu(p,p)u(p,s) = -\bar{u}(p,s)\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p)u(p,s),$$

$$\bar{u}(p,s)[\gamma_\mu L + \Lambda_{c\mu}(p,p)]u(p,s)$$

$$= -\bar{u}(p,s)\frac{\partial}{\partial p^\mu}[A+B(\gamma\cdot p-m)\Sigma_f(p)]u(p,s),$$

$$\bar{u}(p,s)L\gamma_\mu u(p,s) = -\bar{u}(p,s)B\gamma_\mu u(p,s),$$

$$L = -B,$$

$$Z_1 = Z_2,$$

这就是（7-72）式。

**电荷的普适性** 考虑到（7-72）式，（7-71）式表示的电荷重正化就成为

$$e_r = \sqrt{Z_3}\,e, \tag{7-74}$$

只和光子场的重正化常数 $Z_3$ 有关，而和与光子场作用的场的重正化常数无关。但电荷是与光子作用的粒子的电荷，这表明：裸电荷 $e$ 相同的粒子，它们的重正化电荷也是相同的。粒子们的电荷，不会因重正化效应而引起它们之间的差异。这个性质，叫做电荷的普适性。

## §5. 辐射修正效应

在量子电动力学中，三个基本的单圈图，其计算结果，如（7-67）式所示，除四个发散常数 $A$、$B$、$e^2\pi(0)$、$L$ 外，还有三个有限量，如

$$\Sigma_f(p) \sim (\gamma\cdot p-m)^2,$$

$$e^2\pi_e(k^2) = \frac{\alpha}{15\pi}\ \frac{k^2}{m^2},$$

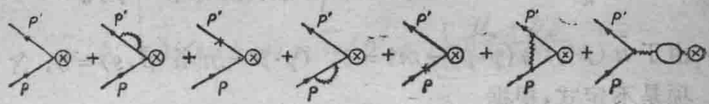
$$\Lambda_{c\mu}(p',p) = \gamma_\mu\frac{\alpha}{3\pi}\ \frac{(p'-p)^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right)$$

$$+\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot(p'-p),\gamma_\mu]。$$

发散常数被裸质量、裸电荷吸收，通过重新定义质量、电荷而消

除掉了。上述的有限量，将发生影响，可由实验测定，叫做辐射修正效应。

**外场中的电子** 为了理解辐射修正效应，我们考察在给定外场中的电子。第六章的§3专门讨论了这个问题。不过，只涉及电子和经典场的相互作用，没有考虑量子电磁场的影响，略去了辐射修正效应。现在，考虑量子场的单圈贡献，其费曼图就是




与之相应的 $S$ 矩阵元就是

$$S^e_{fi}=\overline{u}(p',s')(-ie)[\gamma_\mu-i\Sigma(p')S_f(p')\gamma_\mu$$
$$+i\delta mS_f(p')\gamma_\mu+\gamma_\mu S_f(p)(-i\Sigma(p))+\gamma_\mu S_f(p)i\delta m$$
$$+\Lambda_\mu(p',p)+\gamma_\nu D^{\nu\lambda}(k)ie^2\pi_{\lambda\mu}(k)]u(p,s)A^\mu_e(p'-p),$$

$$S^e_{fi}=\overline{u}(p',s')(-ie)\Big[\gamma_\mu-i(A+B(\gamma\cdot p'-m)$$
$$+\Sigma_f(p')\frac{i}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu+i\delta m\frac{i}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu$$
$$+\gamma_\mu\frac{i}{\gamma\cdot p-m}(-i)(A+B(\gamma\cdot p-m)+\Sigma_f(p))$$
$$+\gamma_\mu\frac{i}{\gamma\cdot p-m}i\delta m+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p')$$
$$+\gamma_\nu\frac{-ig^{\nu\lambda}}{k^2}ie^2(k_\lambda k_\mu-g_{\lambda\mu}k^2)(\pi(0)$$
$$+\pi_c(k^2))\Big]u(p,s)A^\mu_e(p'-p)。$$

由于

$$A=\delta m,\quad \Sigma_f(p)u(p)\sim(\gamma\cdot p-m)^2u(p)=0,$$
$$\overline{u}(p')\gamma\cdot ku(p)=\overline{u}(p')\gamma\cdot(p'-p)u(p)=0,$$

上式成为

$$S^{e}_{fi}=\bar{u}(p',s')(-ie)\Big[\gamma_\mu+B(\gamma\cdot p'-m)\frac{1}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu$$

$$+\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot p-m}(\gamma\cdot p-m)B+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)$$

$$-\gamma_\mu\frac{e^2}{k^2}k^2(\pi(0)+\pi_c(k^2))\Big]u(p,s)A^{\mu}_{e}(p'-p)。$$

由于 $\bar{u}(p',s')(\gamma\cdot p'-m)=0$，$(\gamma\cdot p-m)u(p,s)=0$，含 $B$ 的项是不定式，根据

$$u'=\sqrt{Z_2}\,u=\sqrt{1+B}\,u=\left(1+\frac{1}{2}B\right)u$$

而取 $\frac{1}{2}B$，，故上式成为

$$S^{e}_{fi}=\bar{u}(p',s')(-ie)[\gamma_\mu+B\gamma_\mu+L\gamma_\mu-e^2\pi(0)\gamma_\mu$$

$$+\Lambda_{c\mu}(p',p)-e^2\pi_c(k^2)\gamma_\mu]u(p,s)A^{\mu}_{e}(p'-p)。$$

由于 $B$、$L$、$e^2\pi(0)$、$\Lambda_{c\mu}$、$e^2\pi_c(k^2)$ 都是小于一的量，故

$$\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)-e^2\pi_c(k^2)\gamma_\mu+B\gamma_\mu+L\gamma_\mu-e^2\pi(0)\gamma_\mu$$

$$=(\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)-e^2\pi_c(k^2))(1+B)(1+L)(1-e^2\pi(0))$$

$$=(\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)-e^2\pi_c(k^2)z_\mu)Z_2Z_1^{-1}Z_3。$$

再考虑到

$$e_r=Z_2Z_1^{-1}\sqrt{Z_3},$$

外场中电子的 $S$ 矩阵元，就是

$$S^{e}_{fi}=\bar{u}(p',s')(-ie_r)(\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)$$

$$-e_r^2\pi_c(k^2)\gamma_\mu)u(p,s)\sqrt{Z_3}\,A^{\mu}_{e}(p',p)。\qquad(7\text{-}75)$$

把 $\sqrt{Z_3}\,A^{\mu}_{e}(p',p)$ 看作是实验给定的外场，量子修正效应就在于

$$\gamma_\mu\to\Gamma_\mu=\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p',p)-e_r^2\pi_c(k^2),$$

$$\Gamma_\mu(p',p)=\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{\alpha}{3\pi}\ \frac{(p'-p)^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{5}\right)\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot(p'-p),\gamma_\mu]。\tag{7-76}$$

**戈尔登(Gordon)分解** 为了理解上述量子辐射修正的意义,我们先证明戈尔登分解公式

$$\bar{u}(p',s')\gamma_\mu u(p,s)=\bar{u}(p',s')\left[\frac{p'_\mu+p_\mu}{2m}\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}(p'^\nu-p^\nu)\right]u(p,s)。\tag{7-77}$$

由于狄拉克方程

$$\bar{u}(p',s')\gamma\cdot p'=m\bar{u}(p',s'),$$

$$\gamma\cdot pu(p,s)=mu(p,s),$$

上式左边可以写成

$$\bar{u}(p',s')\gamma_\mu u(p,s)=\frac{1}{2m}[\bar{u}(p',s')\gamma\cdot p'\gamma_\mu u(p,s)$$

$$+\bar{u}(p',s')\gamma_\mu\gamma\cdot pu(p,s)]。\tag{7-78}$$

根据定义和对易关系

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\ \gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu},$$

可以推知

$$\gamma_\mu\gamma_\nu=g_{\mu\nu}-i\sigma_{\mu\nu},$$

$$\gamma\cdot p'\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma\cdot p=p'^\nu(g_{\nu\mu}-i\sigma_{\nu\mu})+(g_{\mu\nu}-i\sigma_{\mu\nu})p^\nu$$

$$=g_{\mu\nu}(p'^\nu+p^\nu)+i\sigma_{\mu\nu}(p'^\nu-p^\nu),$$

把它代入(7-78)式的右边,就证明了(7-77)式的正确性。

**电子磁矩** (7-77)式表示电子的电流。右边第一项是与速度有关的电流,叫做运流电流。第二项是与电子自旋有关的电流,实际上是磁矩。它与外场的作用是

$$-ie\,\bar{u}(p',s')\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}(p'^{\nu}-p^{\nu})u(p,s)A_e^{\mu}(p'-p)$$

$$=-\frac{e}{2m}\bar{u}(p',s')\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}u(p,s)[(p'^{\mu}-p^{\mu})A_e^{\nu}(p'-p)$$

$$-(p'^{\nu}-p^{\nu})A_e^{\mu}(p'-p)],$$

其空间部分为

$$-\frac{e}{2m}\bar{u}(p',s')\frac{1}{2}\sigma_{ij}u(p,s)[(p'^{i}-p^{i})A_e^{j}(p'-p)$$

$$-(p'^{j}-p^{j})A_e^{i}(p'-p)],$$

$\bar{u}(p',s')\frac{1}{2}\sigma_{ij}u(p,s)$ 是电子的自旋，$(p'^{i}-p^{i})A_e^{j}(p'-p)$ $-(p'^{j}-p^{j})A_e^{i}(p'-p)$ 是磁感应强度，因而

$$\mu=-\frac{e}{2m} \tag{7-79}$$

是电子的磁矩。不考虑量子电磁场的辐射效应，由狄拉克理论就可以推知这个磁矩。所以，人们称之为正常磁矩。在(7-75)式的第一项中，就包含了这个磁矩。

(7-76)式的第三项，在(7-75)式中的作用是

$$-ie\bar{u}(p',s')\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot(p'-p'),\gamma_{\mu}]u(p,s)A_e^{\mu}(p'-p)$$

$$=-ie\bar{u}(p',s')\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma_{\nu},\gamma_{\mu}](p'^{\nu}-p^{\nu})u(p,s)A_e^{\mu}(p',p)$$

$$=-ie\bar{u}(p',s')\frac{\alpha}{8\pi m}2i\sigma_{\mu\nu}(p'^{\nu}-p^{\nu})u(p,s)A_e^{\mu}(p',p)$$

$$=-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{e}{2m}\bar{u}(p',s')\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}u(p,s)[(p'^{\mu}-p^{\mu})A^{\nu}(p'-p)$$

$$-(p'^{\nu}-p^{\nu})A_e^{\mu}(p'-p)],$$

与前面所得结果相比，它代表磁矩

$$\delta\mu = -\frac{\alpha}{2\pi}\ \frac{e}{2m} \tag{7-80}$$

与电磁场的相互作用。这是量子辐射效应，是狄拉克理论中未曾遇到的。所以，把它叫做反常磁矩。电子的总磁矩是

$$\mu_t = -\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{e}{2m}。 \tag{7-81}$$

**能级移动** (7-76)式中的第一、第二项，是除开反常磁矩以外的、包含量子辐射修正的电流。它们和电磁场的相互作用是

$$\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_4)\left[1+\frac{\alpha}{3\pi}\ \frac{(p'-p)^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{5}\right)\right]u(p,s)A^{\mu}_{e}(p',p),$$

当给定电磁场是库仑场时，

$$A^{\mu}_{e}(p'-p) = g^{\mu 0}\frac{Ze}{|\vec{p}'-\vec{p}|^2},$$

$Ze$ 是激发库仑场的核电荷，它对电子的作用是

$$\overline{u}(p',s')(-ie\gamma_0)\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ \frac{|\vec{p}'-\vec{p}|^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{5}\right)\right]u(p,s)\frac{Ze}{|\vec{p}'-\vec{p}|^2}$$

$$= u^{+}(p',s')(-ie)\left[\frac{Ze}{|\vec{p}'-\vec{p}|^2}-\frac{\alpha}{3\pi}\ \frac{Ze}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]u(p,s)。$$

与此相应，核场对电子的相互作用能是

$$-\frac{Ze^2}{|\vec{x}|}+\frac{Ze\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right]\delta^3(\vec{x})。$$

后一项使量子态 $\psi_{n,l,m}(x)$ 中的电子的能量，发生一个变化

$$\Delta E_{nlm}=\int\psi^+_{nlm}(x)\frac{Ze\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\delta^3(x)\psi_{nlm}(x)d^3x$$

$$=\frac{Ze\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)|\psi_{nlm}(0)^2|，\quad(7\text{-}82)$$

这是能级发生兰姆移动的一个原因。要得到正确的结果，还要考虑其它因素，还要消除 $\lambda$，这里不再深入讨论。

对于电子的反常磁矩和兰姆的能级移动，量子电动力学的计算结果和实验测量值非常精确地一致。这显示了量子电动力学的正确性。虽然它还有许多问题，有待进一步研究，但它的正确性，或者说它的合理内核，是毋庸置疑的。

## 习　题　七

本章在单圈、链近似下，计算了费米子自能、真空极化、顶角，讨论了相应的重正化。试对所采用的方法，进行评述：

1. 分母的乘积因子，化成因子之和的方法。
2. 正规化方法。
3. 重正化方法。

# 第八章　重正化的一般理论

上一章讨论的是单圈近似、链近似，以及在这近似下的重正化。在这近似下，由费曼图按照费曼规则写下的费曼积分是发散的。把它正规化并计算出来，分成有限部份和发散部份。把发散部份归于质量和电荷，重新定义质量和电荷以后，整个计算结果，就都是有限的。这种情况，可以推广到任意阶近似，也可以推广到 QED 以外的其他理论。这样，就克服了量子场论中的紫外发散困难。对于红外发散，这里不拟论述。在这一章里，我们讨论关于紫外发散的重正化的一般理论。

## §1．费曼积分的发散度

在量子场论中，计算具体过程时，先画出费曼图，再按费曼规则，写出矩阵元。其中，如有圈图，就有回路积分，叫做费曼积分。这积分是发散的。其发散程度如何？由它们的表示式可以知之一二。具体情况，还要由具体的计算给出。如上一章讨论的电子自能(7-2)式、真空极化(7-26)式、顶角因子(7-49)式



$$= -i\Sigma(p) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-i}{l^2-\lambda^2+i\varepsilon}$$

$$(-ie\gamma_\mu)\frac{i}{\gamma\cdot(p-l)-m+i\varepsilon}(-ie\gamma^\mu)\ ,$$



$$= ie^2\pi_{\mu\nu}(k) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{Tr})(-ie\gamma_\mu)$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot p - m + i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p-k) - m + i\varepsilon},$$



$$= \Lambda_\mu(p', p) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-i}{l^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}$$

$$(-ie\gamma_\nu)\frac{i}{\gamma\cdot(p'-l) - m + i\varepsilon}\gamma_\mu$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p-l) - m + i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu)。$$

由积分变数的方次推测，分子含四重积分，分母含$l$的三次方、二次方、四次方。当$l\to\infty$时，分子$\to l^4\to\infty^4$；分母$\to l^3$、$l^2$、$l^4$ $\to\infty^3$、$\infty^2$、$\infty^4$。看来，积分是线性发散、平方发散、对数发散。但是，实际的计算结果，如(7-12)式、(7-13)式、(7-41)式、(7-63)式所示

$$A、B、e^2\pi(0)、L\sim\alpha\ln\frac{M^2}{m^2},$$

都是对数发散的。这表明：由积分变数的方次分析，得到的只是表观的发散程度，实际的发散程度等于或低于表观的发散程度。

**表观发散度**　费曼积分的实际发散程度，要在具体计算以后，才能确定下来。这在一般理论中，是不予讨论的。所以，这里只论述如何从积分变数的方次分析，推测费曼积分的表观发散程度。

费曼图中有外线、内线和顶角。$S$矩阵元中有相应的因子。费曼积分是其中的回路积分。外线只是外动量的函数，与回路积分动量无关，不影响费曼积分的发散情况，一般不算在费曼积分之中。所以，费曼积分是由传播子和顶角因子构成的回路积分。在单圈图中，只有一个回路积分，积分元是四次的。在有$L$个独立回路的圈图中，有$L$个独立的回路积分，积分元是$4L$次的。

被积函数来自传播子和顶角。一个费米传播子是积分变数的 $-1$ 次方；一个玻色传播子是积分变数的 $-2$ 次方。在QED中，相互作用 $\mathscr{H}_I = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$，不包含导数，顶角因子为 $-ie\gamma_\mu$，与积分动量无关，对费曼积分的发散程度没有影响。在有的理论中，相互作用包含导数，如 $\mathscr{H}_I = iG\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\partial^\mu\varphi$，顶角因子为 $G\gamma_\mu\gamma_5 l^\mu$，与积分变数的一次方成比例，会影响积分发散的程度。

一般说来，在一个费曼积分中，有 $L$ 个回路，就有 $\prod_{i=1}^{L} d^4 l_i$ 个积分元，是积分动量的 $4L$ 次方；有 $I_b$ 条玻色传播子，就有 $\prod_{j=1}^{I_b}\Delta_j(l,p)$ 个内线因子，是积分动量的 $-2I_b$ 次方；有 $I_f$ 条费米传播子，就有 $\prod_{k=1}^{I_f} S_k(l,p)$ 个内线因子，是积分动量的 $-I_f$ 次方；有 $V_\alpha$ 个 $\alpha$ 型顶角，就有 $V_\alpha$ 个 $\Gamma_\alpha(l,p,g)$ 顶角因子，如每顶角含 $d_\alpha$ 次导数，其积分动量方次就是 $V_\alpha d_\alpha$。所以，一般的费曼积分为

$$F(p) = \int \prod_{i=1}^{L} d^4 l_i \prod_{j=1}^{I_b} \Delta_j(l, p) \prod_{k=1}^{I_f} S_f(l, p) \prod_{\alpha}^{V} \Gamma_\alpha(l,p,g), \tag{8-1}$$

$p$ 是外线动量，$g$ 是耦合常数。该费曼积分的表观发散度就是

$$D(F) = 4L - I_f - 2I_b + \sum_\alpha V_\alpha d_\alpha。 \tag{8-2}$$

当 $D(F) \geq 0$ 时，费曼积分（8-1）式是表观发散的；当 $D(F) < 0$ 时，费曼积分（8-1）式是表观收敛的。

**图形结构** 对于一个具体过程，其费曼图的外线是确定的。有多少个初态粒子和终态粒子，费曼图中就有多少条外线。对于一个具体过程，其费曼图的内线数和顶角数却是不确

定的，不仅和理论有关，还和计算的近似程度有关。而独立回路的数目，是和内线数、顶角数紧密相关的。

在一个费曼图中，有$I_b$条玻色子内线，有$I_f$条费米子内线，共$I=I_b+I_f$条内线。按费曼规则写下费曼积分时，就有$I$个四维动量积分$\prod_{i=1}^{I} d^4k_i$。费曼图中，有$V_\alpha$个$\alpha$型顶角，共有$V=\sum_\alpha V_\alpha$个顶角。相应的费曼积分中就有$V$个保证诸顶角上能量、动量守恒的因子$\delta^4(\cdots)$。$I$个四维动量积分，积掉$V-1$个$\delta^4(\cdots)$因子后，仍需保留一个$\delta^4(\cdots)$因子，以保证整个过程的能量、动量守恒。这时，剩下的四维动量积分，就是回路积分，回路数为

$$L=I-V+1。\tag{8-3}$$

在一个费曼图中，设想有$E_b$条外玻色子线，$E_f$条外费米子线；有$I_b$条内玻色子线，$I_f$条内费米子线。内线、外线都和顶角相连。相连的情况由所采用的理论确定。设想在一个$\alpha$型顶角上，有$b_\alpha$条玻色子线，有$f_\alpha$条费米子线。那末在$V_\alpha$个$\alpha$型顶角上，就有$V_\alpha b_\alpha$条玻色子线。$V_\alpha f_\alpha$条费米子线。而一条外线只与一个顶角相连，一条内线却联结着两个顶角。所以，存在着如下关系

$$\begin{aligned} E_b+2I_b&=\sum_\alpha V_\alpha b_\alpha\,, \\ E_f+2I_f&=\sum_\alpha V_\alpha f_\alpha。\end{aligned}\tag{8-4}$$

把(8-3)式、(8-4)式代入(8-2)式中，得到表观发散度的另一表示式

$$D(F)=\sum_\alpha V_\alpha\left(\frac{3}{2}f_\alpha+b_\alpha+d_\alpha-4\right) -\frac{3}{2}E_f-E_b+4。\tag{8-5}$$

**耦合常数的量纲** 在一个$\alpha$型顶角上，费米子线的数目$f_\alpha$，玻色子线的数目$b_\alpha$，求导的次数$d_\alpha$，都是由理论给定的。它们都

取决于相互作用的拉格朗日密度$\mathscr{L}_\alpha$，取决于相应的作用量

$$S_\alpha=\int d^4xg_\alpha\mathscr{L}_\alpha。\qquad(8-6)$$

这时，$\mathscr{L}_\alpha$是$f_\alpha$个费米场算符、$b_\alpha$个玻色场算符及其$d_\alpha$次导数的乘积。为了讨论方便，耦合常数$g_\alpha$由$\mathscr{L}_\alpha$中分解出来了。在自然单位中，作用量$s_\alpha$是没有量纲的量。$\mathscr{L}$中的费米子质量项为$m\overline{\psi}\psi$，玻色子的质量项为$m^2\phi^2$。$S$没有量纲，$d^4x$的量纲为$-4$，$\mathscr{L}$的量纲为$+4$。因而，费米场算符的量纲为$\frac{3}{2}$，玻色场算符的量纲为1。设$\alpha$型顶角的耦合常数$g_\alpha$的量纲为$d_{g\alpha}$，则与(8-6)式相应的量纲方程为

$$0=-4+d_{g\alpha}+\frac{3}{2}f_\alpha+b_\alpha+d_\alpha。$$

由此可知，耦合常数$g_\alpha$的量纲为

$$d_{g\alpha}=4-\frac{3}{2}f_\alpha-b_\alpha-d_\alpha,\qquad(8-7)$$

把它代入(8-5)式，就得到表观发散度的又一表示式

$$D(F)=-\sum_\alpha V_\alpha d_{g\alpha}-\frac{3}{2}E_f-E_b+4。\qquad(8-8)$$

这个表示式，便于用来判断费曼积分表观发散的情况。

**重正化判据**　量子场论存在发散困难，人们用重正化方法来克服这种困难。但对某一个确定的理论来说，是否可以用重正化方法来克服发散困难呢？换句话说，满足什么条件的理论，才可以用重正化方法来克服发散困难呢？人们希望有一个明确的判据。(8-8)式能够给出一个简明但不十分肯定的判据。

(8-8)式右边的$d_{g\alpha}$、$E_f$、$E_b$前都是负号。$V_\alpha$、$E_f$、$E_b$都是正整数。当$d_{g\alpha}\geq0$时，$D(F)\geq0$的表观发散图形，就只有有限种。相应的发散的费曼积分也只有有限种。在这样的理论中，只包含有限个发散常数，有可能把这有限个发散常数归于质量和耦

合常数，有可能用重正化方法消除这有限个发散常数。所以，耦合常数的量纲 $d_{g\alpha} \geqslant 0$ 的理论，可能是可以重正化的理论。当 $d_{g\alpha} < 0$ 时，$D(F) \geqslant 0$ 的表观发散图形，有无限多种。相应的发散的费曼积分也有无限多种。在这样的理论中，包含有无限多个发散常数。显然，不可能把无限多个发散常数归于有限质量和耦合常数，不可能用重正化方法消除这无限多个发散常数。由是可知，耦合常数的量纲 $d_{g\alpha} < 0$ 的理论，是不可重正的！

四费米弱相互作用的哈密顿密度 $\mathscr{H}_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_1 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_2 \bar{\psi}_3 \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_4$，耦合常数$G$的量纲是 $-2$。所以，该理论是不可重正的。电磁相互作用的哈密顿密度 $\mathscr{H}_i = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu$，耦合常数$e$的量纲是0。所以，该理论可能是可以重正的。进一步的研究证明，它确实是可以重正的。所有的规范理论，其耦合常数的量纲都是零，都是可以重正的。

## §2. 基本的发散图形

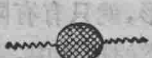
对于耦合常数 $d_{g\alpha} \geq 0$ 的理论，只有有限种 $D(F) \geq 0$ 的表观发散图形。我们以 QED 为例来进行讨论。在 QED 中，耦合常数是电荷 $e$，其量纲为 $d_e = 0$。表观发散度(8-8)式为

$$D(F) = -\frac{3}{2} E_f - E_b + 4。\tag{8-9}$$

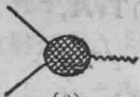
使上式 $D(F) \geq 0$ 的图形，有如下几种：


$E_f = 2$，$E_b = 0$，$D(F) = 1$；

(1)

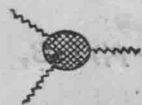

$E_f = 0$，$E_b = 2$，$D(F) = 2$；

(2)



(3)

$$E_f=2,\ E_b=1,\ D(F)=0;$$



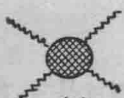
(4)

$$E_f=0,\ E_b=3,\ D(F)=1; \tag{8-10}$$



(5)

$$E_f=0,\ E_b=1,\ D(F)=3;$$

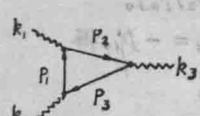


(6)

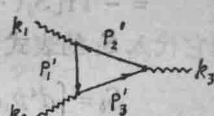
$$E_f=0,\ E_b=4,\ D(F)=0。$$

前三种就是：(1) 电子自能；(2) 真空极化；(3) 顶角。它们的最简单图形，上一章进行了详细的讨论。(4)、(5)两种，由于电荷共轭，根据法雷定理，它们的贡献为零。(6) 因规范不变而是有限的。所以，基本的发散图形，仍是三种：电子自能；真空极化；顶角因子。其它的发散图形，都由它们复合组成。

**法雷定理**　如果图形中有一条封闭的电子线，而且这条封闭电子线上的顶角数是奇数，那末这种图形对 $S$ 矩阵元的贡献就等于零。我们以如下图形为例，来证明法雷定理。




；




(a)　　　　　　　　(b)

两图的差别，只是费米传播子动量方向相反。它们会同时出现在同一过程的 $S$ 矩阵元中。和两图相应的 $S$ 矩阵元是

$$S_a=\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3\delta^4(k_1+p_1-p_2)\delta^4$$

$$(k_2+p_3-p_1)\delta^4(k_3+p_2-p_3)\mathrm{Tr}A,$$

$$A=\gamma_\mu S_f(p_1)\gamma_\nu S_f(p_3)\gamma_\lambda S_f(p_2);$$

$$S_b=\int d^4p_1'd^4p_2'd^4p_3'\delta^4(k_1+p_2'-p_1')$$

$$\cdot\delta^4(k_2+p_1'-p_3')\delta^4(k_3+p_3'-p_2')\mathrm{Tr}B,$$

$$B=\gamma_\mu S_f(p_2')\gamma_\lambda S_f(p_3')\gamma_\nu S_f(p_1')。$$

取电荷共轭变换矩阵 $C$，由于

$$C^{-1}\gamma_\mu C=-\tilde{\gamma}_\mu,$$

而有

$$C^{-1}S_f(p)C=C^{-1}\frac{\gamma\cdot p+m}{p^2-m^2}C$$

$$=\frac{-\tilde{\gamma}\cdot p+m}{p^2-m^2}=\tilde{S}_f(-p),$$

$$C^{-1}BC=C^{-1}\gamma_\mu CC^{-1}S_f(p_2')CC^{-1}\gamma_\lambda CC^{-1}S_f(p_3')CC^{-1}\gamma_\nu CC^{-1}S_f(p_1')C$$

$$=-\tilde{\gamma}_\mu\tilde{S}_f(-p_2')\tilde{\gamma}_\lambda\tilde{S}_f(-p_3')\tilde{\gamma}_\nu\tilde{S}_f(-p_1')$$

$$=-[S_f(-p_1')\gamma_\nu S_f(-p_3')\gamma_\lambda S_f(-p_2')\gamma_\mu]^T,$$

$$\mathrm{Tr}B=\mathrm{Tr}C^{-1}BC$$

$$=-\mathrm{Tr}[S_f(-p_1')\gamma_\nu S_f(-p_3')\gamma_\lambda S_f(-p_2')\gamma_\mu]。$$

把它代入 $S_b$ 的表式，并将积分变数 $p_i'$ 换成 $p_i=-p_i'$，得

$$S_b=\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3\delta^4(k_1-p_2+p_1)$$

$$\delta^4(k_2-p_1+p_3)\delta^4(k_3-p_3+p_2)\mathrm{Tr}B',$$

$$B'=-\gamma_\mu S_f(p_1)\gamma_\nu S_f(p_3)\gamma_\lambda S_f(p_2)=-A。$$

所以

$$S_b=-S_a;\quad S_a+S_b=0。$$

这就证实了法雷定理。图形(4)、(5)的贡献为零。

**光子散射**　图形(6)的最简单情况，如左图所示，是光子的散射过程。相应的$S$矩阵元为

$$S_r=\pi_{\mu\nu\lambda\rho}(k_i,\lambda_i)e^\mu(k_1\lambda_1)e^\nu(k_2\lambda_2)e^\lambda(k_3\lambda_3)e^\rho(k_4\lambda_4),$$

$$\pi_{\mu\nu\lambda}(k_i\lambda_i)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{T}_r)\gamma_\mu\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\gamma_\nu$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p-k_1)-m}\gamma_\lambda$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p-k_1-k_2)-m}\gamma_\rho$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot(p-k_3)-m}\ 。$$

显然，它是对数发散的。把它在$k_i=0$的邻域展开

$$\pi_{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)=\pi_{\mu\nu\lambda}(0)+k_\mu^i\pi_{\gamma\nu\rho}^i(0)+k_\mu^ik_\nu^j\pi_{\lambda\rho}^{ij}(0)+\cdots\cdots,$$

$$\pi_{\mu\nu\lambda\rho}(0)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{T}_r)\gamma_\mu\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\gamma_\nu$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\gamma_\lambda\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\gamma_\rho$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\ ,$$

$$\pi_{\nu\lambda\rho}^3(0)=\frac{\partial}{\partial k_\mu^3}\pi_{\mu\nu\lambda}(k_i)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{Tr})\gamma_\mu$$

$$\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\gamma_\nu\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\gamma_\lambda\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\gamma_\rho$$

$$\frac{i\gamma^\mu}{(\gamma\cdot p-m)^2},$$

$$\cdots\cdots$$

由此可知，$\pi_{\mu\nu\lambda\rho}(0)$是对数发散的，$\pi_{\nu\lambda\rho}^i(0)$、$\pi_{\lambda\rho}^{ij}(0)\cdots$是有限的。这种情况，可以推广到任意阶近似。

另一方面，规范不变性要求

$$e^{\mu}(k_i) \to e^{\mu}(k_i) + k_i^{\mu},$$

$$S_{\gamma} \to S'_{\gamma} = S_{\gamma},$$

这导致

$$k_i^{\mu} \pi_{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) = 0,$$

$$k_i^{\mu} \pi_{\mu\nu\lambda\rho}(0) + k_i^2 \pi_{\nu\lambda\rho}^{i}(0) + k_i^2 k_{\nu}^{j} \pi_{\lambda\rho}^{ij}(0) + \cdots = 0。$$

光子的质量为零，$k^2 = 0$，因而

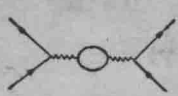
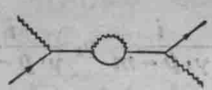
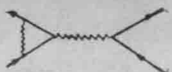
$$k_i^{\mu} \pi_{\mu\nu\lambda\rho}(0) = 0,$$

$$\pi_{\mu\nu\lambda\rho}(0) = 0。$$

这表明：光子散射的矩阵元是有限的，图形(6)不是基本的发散图形。

综上所述，在 QED 中，基本的发散图形只有三种：电子自能；真空极化；顶角因子。其它发散图形，都是由它们复合而成的。

例如

 ;  ; 

它们的表观发散度 $D(F) = -2$ 或 $-1$，是表观收敛的。可是，由于插入了电子自能、真空极化、顶角因子，实际上就成为发散的。

## §3. 戴生方程

费曼图的基本构件，是内线、外线和顶角。费曼积分的基本因子，是传播子和顶角。在QED中，基本的发散图形，是电子自能、真空极化和顶角因子。这些基本构件、基本因子和基本发散图形，在量子电动力学中，具有基本的、十分重要的意义。在上一章中，在单圈近似、链近似下，对它们进行了计算，得到了如(7-22)式、(7-47)式、(7-65)式、(7-67)式所示的结果

$$S_f(p) = Z_2 \frac{i}{\gamma p - m - \Sigma_f(p)};$$

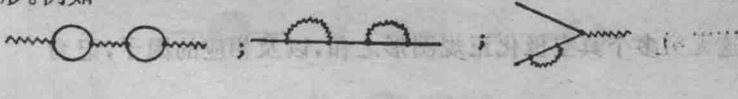
$$D'_{\mu\nu}(k) = Z_3 \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2(1+e^2\pi_c(k^2))};$$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{Z_1}(\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu});$$

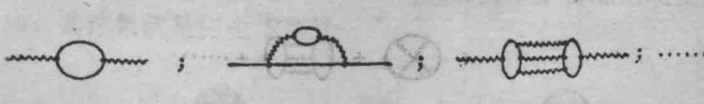
$$Z_1 - 1 \sim \alpha \ln \frac{M^2}{m^2}\ ;\quad \Sigma_f(p)、e^2\pi_c(k^2)、\Lambda_{c\mu}\ \text{有限。}$$

在任意近似下，要算出类似的结果是困难的。特别是，在所有阶的完全计算中，要算出精确的结果，是不可能的。在这一节中，我们要导出它们满足的方程，导出完全传播子、完全顶角应该满足的方程。这方程，叫做戴生(Dyson)方程。

**正规图形**　为了建立戴生方程，我们先定义正规图形。一个费曼图，如果剪断内中的任何一根内线，都不能使它成为两个不相连接的图形，那末，这个图形就叫做正规图形，也叫做单粒子不可约图形，常常用 lPI 记之。反之，如果剪断内中的一根内线，就能使它成为两个不相连接的图形，那末它就是非正规图形。例如



就是非正规图形．而



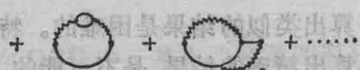
就是正规图形。

和两根费米子线相连，也只和两根费米子线相连的图形，叫做费米子自能图形。费米子自能的正规图形，有无穷多个，例如



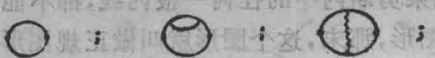
这无穷多个费米子自能正规图形之和，以及相应的因子，记为

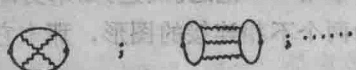
$-i\Sigma^*(p$ 



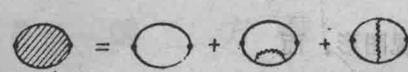
(8-11)

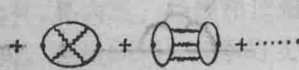
和两根光子线相连，也只和两根光子线相连的图形，叫做真空极化图形。真空极化的正规图形，有无穷多个，例如





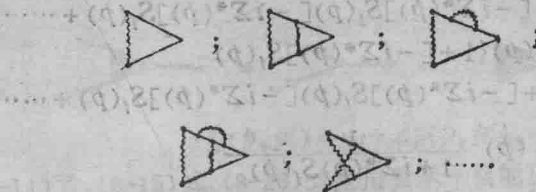
这无穷多个真空极化正规图形之和，以及相应的因子，记为

$ie^2\pi^*_{\nu\mu}(k)$ = 



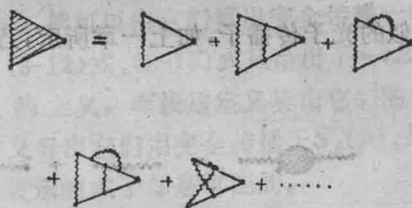
(8-12)

和两根费米子线、一根光子线相连，也只和两根费米子线、一根光子线相连的图形，叫做顶角图形。正规的顶角图形，有无穷多个，例如



这无穷多个正规顶角图形之和，以及相应的因子，记为

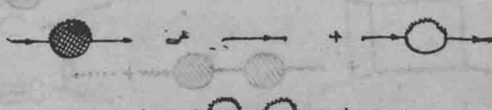
$\Lambda_\mu^*(p,p') =$



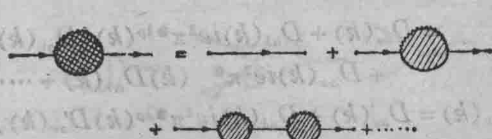
(8-13)

**完全传播子和完全顶角**　在微扰展开中，不管是传播子还是顶角，都有无穷多项。这无穷多项的总和，就构成完全传播子或完全顶角。

链近似的费米传播子，如上一章所示，实际上是单圈近似、链近似，或者说是单圈链近似的传播子



如果把链中的单圈，换成(8-11)式定义的费米子自能正规图形之和，其结果就是完全传播子



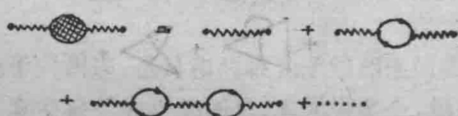
$$S'_f(p) = S_f(p) + S_f(p)[-i\Sigma^*(p)]S_f(p) + S_f(p)$$

$$
\begin{aligned}
&[-i\Sigma^*(p)]S_f(p)[-i\Sigma^*(p)]S_f(p)+\cdots\cdots \\
&=S_f(p)\{1+[-i\Sigma^*(p)]S_f(p) \\
&\quad +[-i\Sigma^*(p)]S_f(p)[-i\Sigma^*(p)]S_f(p)+\cdots\cdots\},
\end{aligned}
$$

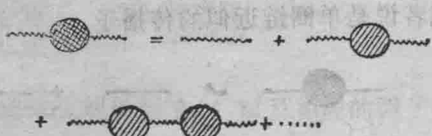
$$
S'_f(p)=S_f(p)\frac{1}{1+i\Sigma^*(p)S_f(p)}
$$

$$
=\frac{i}{\gamma\cdot p-m-\Sigma^*(p)}。\tag{8-14}
$$

链近似的光子传播子，如上一章所示，乃单圈链近似的光子传播子



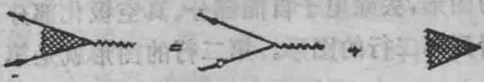
如果把链中的单圈，换成(8-12)式定义的真空极化正规图形的总和，就得到完全光子传播子



$$
\begin{aligned}
D'_{\mu\nu}(k)&=D_{\mu\nu}(k)+D_{\mu\lambda}(k)ie^2\pi^{*\lambda\rho}(k)D_{\rho\nu}(k) \\
&\quad +D_{\mu\lambda}(k)ie^2\pi^{*\lambda\rho}(k)D_{\rho\lambda}(k)ie^2\pi^{*\lambda\alpha}(k)D_{\alpha\gamma}(k) \\
&\quad +\cdots\cdots \\
&=D_{\mu\nu}(k)+D_{\mu\lambda}(k)ie^2\pi^{*\lambda\rho}(k)\{D_{\rho\nu}(k) \\
&\quad +D_{\rho\sigma}(k)ie^2\pi^{*}(k)D_{\alpha\nu}(k)+\cdots\cdots\},
\end{aligned}
$$

$$
D'_{\mu\nu}(k)=D_{\mu\nu}(k)+D_{\mu\lambda}(k)ie^2\pi^{*\lambda\rho}(k)D'_{\rho\nu}(k)。\tag{8-15}
$$

对于完全顶角，我们定义为简单顶角与(8-13)式表示的所有正规顶角之和，即



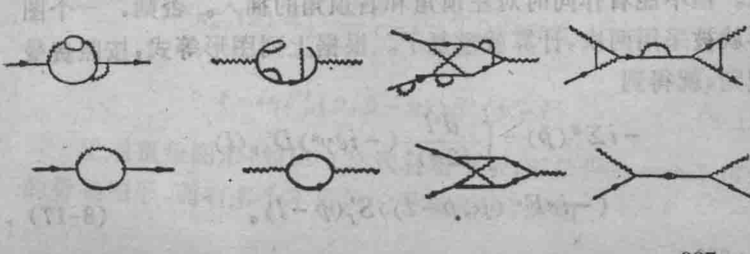
$$\Gamma'_\mu(p,p') = \gamma_\mu + \Lambda^*_\mu(p,p')。\qquad (8\text{-}16)$$

(8-14)式、(8-15)式、(8-16)式是用费米子自能正规图形总和 $-i\Sigma^*(p)$、真空极化正规图形总和 $ie^2\pi^*_{\mu\nu}(k)$、正规顶角总和 $\Lambda^*_\mu(p,p')$ 表示的完全传播子和完全顶角。如果能够算出 $-i\Sigma^*(p)$、$ie^2\pi^*_{\mu\nu}(k)$ $\Lambda^*_\mu(p,p')$，就可以由它们算出完全传播子和完全顶角。可惜，(8-11)式、(8-12)式、(8-13)式只给出了 $-i\Sigma^*(p)$、$ie^2\pi^*_{\mu\nu}(k)$、$\Lambda^*_\mu(p,p')$ 的定义，而按这定义算出它们的结果是困难的。然而，按这定义导出它们用完全传播子 $S'_f(p)$、$D'_{\mu\nu}(k)$ 和完全顶角 $\Gamma'_\mu(p,p)$ 表示的式子却是可能的。

**骨架图形**　为了用完全传播子和完全顶角来表示诸正规图形的总和，我们先定义骨架图形或图形的骨架。一个图形，我们把它内部包含的所有的电子自能部分、真空极化部分和顶角部分都去掉，并代之以简单的电子线、光子线和顶角，这样所得到的图形，就是原图形的骨架，或者说它是原图形的骨架图形。例如

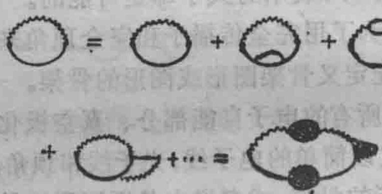


左图去除电子自能部分、真空极化部分、顶角部分以后，就成为右图。右图就是左图的骨架，或者说右图就是左图的骨架图形。又例如



第一行的图形，去除电子自能部分、真空极化部分、顶角部分以后，就得到第二行的图形。第二行的图形就是第一行相应图形的骨架。

电子自能正规图形，如(8-11)式右端所示，只有第一个是不可约化的骨架图形。其它正规图形约化以后，即去除电子自能部分、真空极化部分、顶角部分以后，就都成为第一个图形。换句话说，所有的电子自能正规图形，都可以由在第一个骨架图形中插入相当的电子自能部分、真空极化部分、顶角部分而获得。由此可知，把电子自能骨架图形中的传播子和顶角，换成完全传播子和完全顶角，就得到所有的电子自能正规图形，即



在上式的右图中，一个顶角用完全顶角，另一个顶角不用完全顶角，仍用简单顶角。原因是作顶角插入时，如

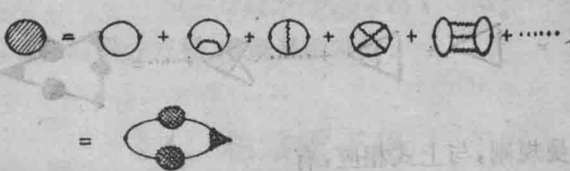


既可以看作是对左顶角的插入，也可以看作是对右顶角的插入。但不能看作同时对左顶角和右顶角的插入。否则，一个图形就被采用两次，计算就重复了。根据上列图形等式，按照费曼规则，就得到

$$-i\Sigma^*(p)=\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}(-ie\gamma^\mu)D'_{\mu\nu}(l)$$

$$(-ie\Gamma^\nu(p,p-l))S'_f(p-l)。\qquad(8\text{-}17)$$

真空极化正规图形，如(8-12)式右端所示，也只有第一个是不可约化的骨架图形。第二个、第三个…约化以后，就都成为第一个图形。反过来说，在第一个图形中，插入适当的电子自能部分、真空极化部分、顶角部分，就得到第二个、第三个…图形。实际上，所有的正规图形，都可以由第一个图形作适当插入得到。因此，在第一个骨架图形中，把传播子和顶角换成完全传播子和顶角，就得到全部正规图形。即



在上式的右图中，一个顶角是完全顶角，一个顶角是简单顶角。其原因也是作顶角插入时，如



既可以看作对左顶角的插入，又可以看作对右顶角的插入，但不能同时看作对左、右两顶角的插入。根据上列图形等式，按照费曼规则，就得到

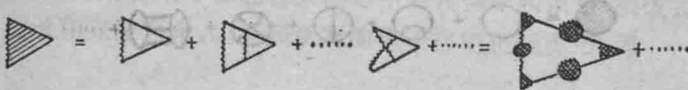
$$ie^2\pi^*_{\mu\nu}(k)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{T}_r)(-ie\gamma_\mu)S'_f(p)$$

$$(-ie\Gamma'_\nu(p,p-k))S'_f(p-k)。\qquad(8\text{-}18)$$

正规顶角图形，如(8-13)式右端所示，不是只有一个不可约的骨架图形，而有多个不可约的骨架图形，例如



就都是不可约的骨架图形。所有正规顶角图形，都是由这些骨架插入适当的电子自能部分、真空极化部分、顶角部分形成。所以，正规顶角图形的总和，就等于将这些骨架中的传播子和顶角，换成完全传播子和完全顶角，然后求和。即



按照费曼规则，与上式相应，有

$$\Lambda^*_\mu(p,p') = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} D'_{\nu\lambda}(l)(-ie)\Gamma'^{\nu}(p',p'-l)$$

$$S'_f(p'-l)\Gamma'_\mu(p'-l,p-l)S'_f(p-l)$$

$$(-ie)\Gamma'^{\lambda}(p,p-l)+\cdots\cdots \qquad (8\text{-}19)$$

**戴生方程** (8-14)式、(8-15)式、(8-16)式是用完全的电子自能部分$-i\Sigma^*(p)$、完全的真空极化部分$ie^2\pi^*_{\mu\nu}(k)$、完全的顶角部分$\Lambda^*_\mu(p,p')$表示完全传播子和完全顶角的公式。而(8-17)式、(8-18)式、(8-19)式却是用完全传播子和完全顶角表示完全的电子自能部分、完全的真空极化部分、完全的顶角部分的公式。它们的全体，就组成戴生方程

$$S'_f(p) = \frac{i}{\gamma\cdot p - m - \Sigma^*(p)},$$

$$D'_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda}(k)ie^2\pi^*{}_{\lambda\rho}(k)D'_{\rho\nu}(k).$$

$$\Gamma'_\mu(p,p') = \gamma_\mu + \Lambda^*_\mu(p,p'),$$

$$(8\text{-}20)$$

$$-i\Sigma^*(p)=\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}(-ie\gamma^\mu D'_{\mu\nu}(l)(-ie)$$

$$\Gamma'^\nu(p,p-l)S'_f(p-l),$$

$$ie^2\pi^*_{\mu\nu}(k)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{Tr})(-ie\gamma_\mu)$$

$$S'_f(p)(-ie)\Gamma'_\nu(p,p-k)S'_f(p-k),$$

$$\Lambda^*_\mu(p,p')=\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}D'_{\nu\lambda}(l)(-ie)\Gamma'^\nu(p',p'-l)$$

$$S'_f(p'-l)\Gamma'_\mu(p'-l,p-l)S'_f(p-l)$$

$$(-ie)\Gamma'^\lambda(p,p-l)+\cdots\cdots。$$

这是一组联立的积分方程，求解是困难的。

## §4. 相乘重正化

戴生方程(8-20)式，求解是困难的。但是，用它可以证明：上一章讨论的、单圈链近似下的重正化理论，推广到一般情况下，也是正确的。完全传播子和完全顶角，都是发散的，都可以因子化，都取相乘重正化的形式

$$\begin{aligned}S'_f(p)&=Z_2S^r_f(p),\\ D'_{\mu\nu}(k)&=Z_3D^r_{\mu\nu}(k),\\ \Gamma'_\mu(p,p')&=Z_1^{-1}\Gamma^r_\mu(p,p')。\end{aligned}\tag{8-21}$$

$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$是发散的重正化常数；$S^r_f(p)$、$D^r_{\mu\nu}(k)$、$\Gamma^r_\mu(p,p')$是有限的传播子和顶角。所有的发散常数，通过重新定义质量和电荷，都被消除。描写物理过程的$S$矩阵元都是有限的。

**交缠发散** 在深入讨论重正化理论时，碰到的交缠发散，是最令人头痛的。例如，由下列左图获得右图时，



有两种方式：一是对 $a$ 顶角的插入；一是对 $b$ 顶角的插入；二者是平等的、不可区分的，又是相互联系的。右图的回路积分是

$$F(p)=\int\frac{d^4l_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4l_2}{(2\pi)^4}\frac{-i}{l_1^2-i\varepsilon}$$
$$\frac{-i}{l_2^2-i\varepsilon}(-ie\gamma_\mu)\frac{i}{\gamma\cdot(p-l_2)-m}$$
$$(-ie\gamma_\nu)\frac{i}{\gamma\cdot(p-l_1-l_2)-m}(-ie\gamma^\mu)$$
$$\frac{i}{\gamma\cdot(p-l_1)-m}(-ie\gamma^\nu),$$

它反映了两顶角的相互联系、相互交缠的情况。由于含有 $p-l_1-l_2$ 的因子，使对 $l_1$ 的积分和对 $l_2$ 的积分交缠在一起，难以分开进行。而且，不管是先对 $l_1$ 积分，还是先对 $l_2$ 积分，都立即出现发散，使问题更加复杂。这种发散，叫做交缠发散。

另一方面，在导出戴生方程时，为避免计算重复，在电子自能和真空极化的骨架图形中，一个顶角用完全顶角，另一个顶角用简单顶角。这样，就使两个顶角成为不平等的，成为可以区分的。这在讨论发散问题时，是不容许的。所以，在论述重正化理论时，我们还必须平等对待两个顶角，把骨架图形中的顶角都换成完全顶角。人们在深入研究以后，证明这个设想是可行的*。

现在，我们用按上述修改的戴生方程(8-20)式，来证明相乘重正化(8-21)式是可行的。并推证重正化常数 $Z_1$、$Z_2$、$Z_3$ 和重正化的传播子和顶角的一般形式。要着重指出，如何通过质量重正化和电荷重正化，来消除发散。

**重正化电荷、顶角和常数 $Z_1$** 首先，设想相乘重正化(8-21)式是正确的。把它代入(8-20)式的第六式，得

$$\Lambda_\mu^*(p,p')=-e^2\frac{Z_3Z_2^2}{Z_1^3}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}D^r_{\nu\lambda}(l)$$

---

*参看D. Luvie«*Particles and Fields*»p.303及其引文。

$$\Gamma_r^{\nu}(p',p'-l)S_f^r(p'-l)$$

$$\Gamma_{\mu}^r(p'-l,p-l)S_f^r(p-l)$$

$$\Gamma_r^{\lambda}(p,p-l)+\cdots\cdots。$$

按(7-71)式定义重正化电荷

$$e_r=\frac{\sqrt{Z_3}Z_2}{Z_1}\ e, \tag{8-22}$$

则上式可以写成

$$\Lambda_{\mu}^{*}(p,p')=Z_1^{-1}\Lambda_{\mu}'(p,p'), \tag{8-23}$$

$$\Lambda_{\mu}'(p,p')=-e_r^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}D_{\nu\lambda}^r(l)\Gamma_r^{\nu}(p',p'-l)$$

$$S_f^r(p'-l)\Gamma_{\mu}^r(p'-l,p-l)S_f^r(p-l)\Gamma_r^{\lambda}(p,p-l)$$

$$+\cdots\cdots。$$

$\Lambda_{\mu}'(p,p')$是用有限的、重正化了的电荷、传播子、顶角构成的回路积分,是在骨架图形中插入有限的、重正化了的电荷、传播子、顶角形成的。这个回路积分,显然是发散的,发散的情况和骨架图形的相同。所以,有(7-63)式的形式

$$\Lambda_{\mu}'(p,p')=L\gamma_{\mu}+\Lambda_{c\mu}(p,p'), \tag{8-24}$$

$L$是发散的,$\Lambda_{c\mu}(p,p')$是有限的。当然,其数值与(7-63)式所示的不同。

把(8-23)式、(8-24)式代入(8-20)式的第三式,得

$$\Gamma_{\mu}'(p,p')=\gamma_{\mu}+Z_1^{-1}[L\gamma_{\mu}+\Lambda_{c\mu}(p,p')]$$

$$=\frac{1}{Z_1}[\gamma_{\mu}(Z_1+L)+\Lambda_{c\mu}(p,p')],$$

令

$$Z_1=1-L, \tag{8-25}$$

就得到

$$\Gamma_{\mu}'(p,p')=Z_1^{-1}\Gamma_{\mu}^r(p,p'), \tag{8-26}$$

$$\Gamma^{r}_{\mu}(p,p')=\gamma_{\mu}+\Lambda_{c\mu}(p,p')。$$

这样一来，我们利用戴生方程，通过按(8-22)式把电荷重正化，按 (8-25) 式选择重正化常数 $Z_1$，就得到了完全顶角的相乘重正化形式(8-26)式，它使(8-21)式具体化。

**重正化质量、费米传播子和常数 $Z_2$** 把(8-21)式代入(8-20)式的第四式，得

$$-i\sum^{*}(p)=-e^{2}\frac{Z_2Z_3}{Z_1^2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\Gamma^{\mu}_{r}(p-l,p)$$

$$D^{r}_{\mu\nu}(l)\Gamma^{\nu}_{r}(p,p-l)S^{r}_{f}(p-l)。$$

考虑到电荷重正化(8-22)式，上式可以写成

$$-i\Sigma^{*}(p)=Z_2^{-1}[-i\Sigma'(p)],\tag{8-27}$$

$$-i\Sigma'(p)=-e_r^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\Gamma^{\mu}_{r}(p-l,p)D^{r}_{\mu\nu}(l)$$

$$\Gamma^{\nu}_{r}(p,p-l)S^{r}_{f}(p-l)。$$

$-i\Sigma'(p)$是用重正化了的、有限的传播子和顶角，在骨架图形中，取代了简单传播子和顶角后，构成的回路积分。显然，它是发散的。其发散情况，有如(7-16)式所示，

$$\Sigma'(p)=A+B(\gamma\cdot p-m)+\Sigma_f(p),\tag{8-28}$$

$A$、$B$ 是发散常数，$\sum_f(p)$是有限的。当然，它们的数值，和单圈链近似下的数值是不同的。把(8-27)式、(8-28)式代入(8-20)式的第一式，得

$$S'_f(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m-Z_2^{-1}[A+B(\gamma\cdot p-m)+\sum_f(p)]}。$$

我们定义电子自能和重正化质量

$$\delta m=Z_2^{-1}A,\quad m_r=m+\delta m,\tag{8-29}$$

上式就可以写成

$$S'_f(p)=Z_2\frac{i}{(\gamma\cdot p-m_r)(Z_2+B)-\sum_f(p)}。$$

令

$$Z_2 = 1 - B, \tag{8-30}$$

就得到

$$S'_f(p) = Z_2 S^r_f(p), \tag{8-31}$$

$$S^r_f(p) = \frac{i}{\gamma \cdot p - m_r - \sum_f(p)}。$$

由此可见，我们按(8-29)式定义重正化质量，按(8-30)式选取重正化常数$Z_2$，就得到了完全费米传播子的相乘重正化形式。(8-31)式是(8-21)式第一式的具体表达式。

**重正化光子传播子和常数** $Z_3$　在(8-20)式的第五式中，用完全顶角取代简单顶角，并把(8-21)式代入，得

$$ie^2\pi^*_{\mu\nu}(k) = e^2 Z_1^{-2} Z_2^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (\mathrm{Tr})\, \Gamma^r_\mu(p-k, p) S^r_f(p) \Gamma^r_\nu(p, p-k) S^r_f(p-k),$$

考虑到电荷重正化(8-22)式，上式可以写成

$$ie^2\pi^*_{\mu\nu}(k) = Z_3^{-1} ie_r^2 \pi'_{\mu\nu}(k),$$

$$\pi'_{\mu\nu}(k) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathrm{T}_r \Gamma^r_\mu(p-k, p) S^r_f(p) \Gamma^r_\nu(p, p-k) S^r_f(p-k)。 \tag{8-32}$$

$\pi'_{\mu\nu}(k)$是在真空极化的骨架图形中，用重正化了的、有限 的传播子和顶角，代替了简单的传播子和顶角后，构成的回路积分。显然，它是发散的。其发散情况，有如(7-41)式的形式。由于规范不变性，它应是

$$\pi'_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2)\pi(k^2),$$

$$\pi(k^2) = \pi(0) + \pi_c(k^2), \tag{8-33}$$

$\pi(0)$是发散的，$\pi_c(k)$是有限的。当然，它们的数值，和单圈链近似下的数值是不同的。

把(8-32)式、(8-33)式代入(8-20)式的第二式，得

$$D'_{\mu\nu}(k)=D_{\mu\nu}(k)+D_{\mu\lambda}(k)ie_r^2(k^\lambda k^\rho-g^{\lambda\rho}k^2)$$
$$(\pi(0)+\pi_c(k^2))D'_{\rho\nu}(k)Z_3^{-1},$$

求解这一方程，得

$$D'_{\mu\nu}(k)=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2[1+Z_3^{-1}e_r^2(\pi(0)+\pi_c(k^2))]}$$
$$+\frac{Z_3^{-1}e_r^2k_\mu k_\nu(\pi(0)+\pi_c(k^2))}{k^2[1+Z_3^{-1}e_r^2(\pi(0)+\pi_c(k^2))]}。$$

在费曼图中，光子传播子总是和守恒流相乘的，因而第二项的贡献为零。实际的起作用的完全传播子是

$$D'_{\mu\nu}(k)=Z_3\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2[Z_3+e_r^2\pi(0)+e_r^2\pi_c(k^2)]},$$

令

$$Z_3=1-e_r^2\pi(0), \tag{8-34}$$

就得到

$$D'_{\mu\nu}(k)=Z_3D^r_{\mu\nu}(k),$$

(8-35)

$$D^r_{\mu\nu}(k)=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2[1+e_r^2\pi_c(k^2)]}。$$

这表明：按(8-34)式选取重正化常数$Z_3$以后，完全光子传播子，就取相乘重正化的形式(8-35)式。

**场量的重正化**　由(8-31)式、(8-35)式所示，传播子是相乘重正化的

$$S'_f=Z_2S^r_f;\quad D'_{\mu\nu}=Z_3D^r_{\mu\nu}。$$

按定义

$$S_f(x_1-x_2)=\langle 0|T\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0\rangle,$$
$$D_{\mu\nu}(x_1-x_2)=\langle 0|TA_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle$$

可以推知，场量 $\psi(x)$ 和 $A^{m}_{\mu}(x)$ 也是相乘重正化的，并且

$$\psi'(x)=\sqrt{Z_2}\,\psi(x),$$

$$A'_\mu(x)=\sqrt{Z_3}\,A_\mu(x)。\tag{8-36}$$

有时，把它们叫做波函数的重正化。它们的傅立叶变换，即动量空间的波函数的重正化为

$$u'(p,s)=\sqrt{Z_2}\,u(p,s),$$

$$e'_\mu(k,\lambda)=\sqrt{Z_3}\,e_\mu(k,\lambda)。\tag{8-37}$$

**发散的消除** 完全顶角、完全传播子和外线，都是相乘重正化的。把它们用于 $S$ 矩阵元的计算，这些发散的重正化常数，会被裸电荷吸收。在电荷重正化以后，整个计算结果就会是有限的。例如，在电子散射中，其骨架图形，就是最低阶的费曼图



如果把外线、内线和顶角都看成是完全的，那末，按费曼规则，写下的 $S$ 矩阵元，就也是完全的

$$S_e=(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\sqrt{\frac{m}{VE'}}\overline{u'}(p',s')$$

$$(-ie\Gamma'_\mu(p,p'))\sqrt{\frac{m}{VE}}u'(p',s)D^{\mu\nu}{}'(p'-p)$$

$$\sqrt{\frac{m}{V\varepsilon'}}\overline{u'}(q',\tau')(-ie\Gamma'_\nu(q,q'))$$

$$\sqrt{\frac{m}{V\varepsilon}}u^r(q,\tau)$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\sqrt{\frac{m}{VE'}}\overline{u^r}(p',s')$$

$$(-ie\frac{Z_2\sqrt{Z_3}}{Z_1})\Gamma^r_\mu(p,p')\sqrt{\frac{m}{VE}}$$

$$u^r(p,s)D^{\mu\nu}_r(p'-p)\sqrt{\frac{m}{V\varepsilon'}}\overline{u^r}(q',\tau')$$

$$(-ie\frac{Z_2\sqrt{Z_3}}{Z_1})\Gamma^r_\nu(q,q')\sqrt{\frac{m}{V\varepsilon}}u^r(q,\tau)\quad 。$$

考虑到电荷重正化

$$e_r=eZ_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}\ ,$$

就得到

$$S_s=(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\sqrt{\frac{m}{VE'}}\overline{u}^r(p',s')$$

$$(-ie_r)\Gamma^r_\mu(p,p')\sqrt{\frac{m}{VE}}u^r(p,s)$$

$$D^{\mu\nu}_r(p'-p)\sqrt{\frac{m}{V\varepsilon'}}\overline{u}^r(q',\tau')(-ie_r)$$

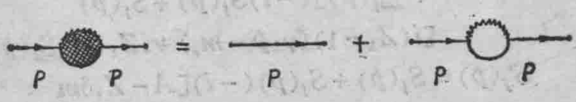
$$\Gamma^\nu_r(q,q')\sqrt{\frac{m}{V\varepsilon}}u^r(q,\tau)。$$

显然，它是有限的。这正是人们所希望的。当然，由于重正化的内线、外线和顶角的具体数值还是未知的，整个$S$矩阵元也仍然是未知的。以上讨论只具有定性的启示意义，它告诉我们，用重正化的方法，确实可以消除发散。

## §5. 抵消项消除发散

在以上的论述中，我们先用裸量（裸电荷和裸质量）计算电子自能、真空极化和顶角，再把其中的发散部份分离出来，归之于质量和电荷，然后重新定义质量和电荷，就可以消除发散。对于可以重正化的理论，与此相应，还有一种等价的重正化方法，即用抵消项来消除发散的方法。在这种方法中，先用重正化的量（重正化电荷和重正化质量）进行计算，并把发散部份分离出来，然后用抵消项来消除发散。

**费米传播子** 我们先以费米传播子的计算为例，来阐明这种方法的的特点。单圈近似的费米传播子是



$$S'_f(p) = S_f(p) + S_f(p)[-i\sum(p)]S_f(p)。 \tag{8-38}$$

如前所述，费米子的自能部分为

$$\sum(p) = A + B(\gamma\cdot p - m_r) + \sum_f(p),$$

$A$、$B$ 是发散常数，$\sum_f(p)$是有限的。与前不同，$m_r$ 是重正化质量；$A$、$B$、$\sum_f(p)$中的电荷和质量也都是重正化了的。而

$$S_f(p) = \frac{i}{\gamma\cdot p - m_r}$$

就是用重正化量表示的自由传播子。显然，(8-38)式中的传播子$S'_f(p)$是发散的。

电磁相互作用的拉格朗日密度是

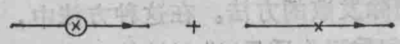
$$\mathscr{L} = \overline{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu + ie_r A_\mu)\psi - m_r \overline{\psi}\psi$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu),$$

(8-38)式就是由它导出的。如果认为：电磁相互作用的拉格朗日密度，除上述诸项外，还有附加项，如

$$(Z_2-1)\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_r)\psi+Z_2\delta m\overline{\psi}\psi, \tag{8-39}$$

那末，单圈近似下的传播子，除(8-38)式表示的图形和因子外，还有与附加项相应的顶角图形和因子



$$i(Z_2-1)(\gamma\cdot p-m_r)+iZ_2\delta m \tag{8-40}$$

而总的费米传播子就成为

$$\begin{aligned}S'_f(p)=S_f(p)&+S_f(p)[A+B(\gamma\cdot p-m_r)\\&+\textstyle\sum_f(p)](-i)S_f(p)+S_f(p)\\&[i(Z_2-1)(\gamma\cdot p-m_r)+iZ_2\delta m]S_f(p),\\S'_f(p)=S_f(p)&+S_f(p)(-i)[A-Z_2\delta m\\&+(B-Z_2+1)(\gamma\cdot p-m_r)\\&+\textstyle\sum_f(p)]S_f(p)。\end{aligned}$$

如果令

$$Z_2\delta m=A,\quad Z_2=1+B, \tag{8-41}$$

那末，单圈近似的费米传播子

$$S'_f(p)=S_f(p)-iS_f(p)\textstyle\sum_f(p)S_f(p)$$

就成为有限的了。发散被抵消项消除了。

**重正化的一般规则** 如上所述，用抵消项消除发散的方法，在于选择适当的抵消项，在于选择适当的重正化常数，如$Z_2$ $\delta_m$等。如何选择抵消项，如何建立重正化理论？人们把以上论述的、两种等价的重正化方法结合起来，提出了一个建立重正化理论的一般规则。先用裸量：裸电荷$e_0$，裸质量$m_0$；裸场$\psi^0$、$A^0_\mu$，写下在前几章确立的理论的拉格朗日密度，如

$$\mathscr{L}=\overline{\psi}_0 i\gamma^\mu(\partial_\mu+ie_0A^0_\mu)\psi_0-m_0\overline{\psi}_0\psi_0$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^0-\partial_\nu A_\mu^0)(\partial^\mu A^\nu_0-\partial^\nu A^\mu_0)。\quad (8\text{-}42)$$

然后，用相乘重正化方法（质量可用相加重正化方法），定义重正化的量：重正化电荷 $e$；重正化质量 $m$；重正化场量 $\psi$、$A^\mu$，

$$m=m_0+\delta m;\quad e=Z_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}e_0;$$

$$\psi_0=\sqrt{Z_2}\,\psi;\quad \overline{\psi}_0=\sqrt{Z_2}\,\overline{\psi};\quad (8\text{-}43)$$

$$A_\mu^0=\sqrt{Z_3}\,A_\mu$$

把(8-43)式代入(8-42)式，得

$$\mathscr{L}=Z_2\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m+\delta m)\psi-Z_1e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A^\mu$$

$$-Z_3\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu),$$

再把它分解为两个部分

$$\mathscr{L}=\overline{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)\psi-m\overline{\psi}\psi$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$$

$$+(Z_2-1)\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi+Z_2\delta m\overline{\psi}\psi$$

$$-(Z_1-1)e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\quad (8\text{-}44)$$

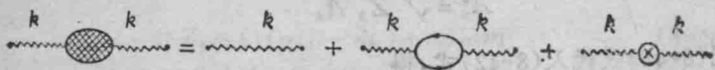
$$-(Z_3-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)。$$

第一部分是式中的第一、二行，与(8-42)式有相同的形式，只是裸量换成了重正化的量。这一部分叫做基本项。第二部分是式中的第三、四、五行，叫做抵消项。(8-39) 式就是该抵消项中

的第三行。

用(8-44)式进行计算时，对于树图近似，采用基本项就够了。对于圈图近似，先用基本项进行计算，分离出发散部份和有限部份。再计算与抵消项相应的顶角因子。然后选择适当的$Z$和$\delta m$，就可以消除发散，使计算结果成为有限。费米传播子的例，正如前述。

**光子传播子** 我们再用上列方法，来讨论单圈近似的光子传播子。它们是




$$D'_{\mu\nu}(k)=D_{\mu\nu}(k)+D_{\mu\lambda}(k)ie^2\pi^{\lambda\rho}(k)D_{\rho\nu}(k)$$
$$+D_{\mu\lambda}(k)i(Z_3-1)(g^{\lambda\rho}k^2-k^\lambda k^\rho)D_{\rho\nu}(k)。$$

如前所述，真空极化部分

$$\pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)(\pi(0)+\pi_c(k^2)),$$

$\pi(0)$是发散的，$\pi_c(k^2)$是有限的。代入上式，得

$$D'_{\mu\nu}(k)=D_{\mu\nu}(k)+D_{\mu\lambda}(k)i(k^\lambda k^\rho-g^{\lambda\rho}k^2)$$
$$[e^2\pi(0)-Z_3+1+e^2\pi_c(k^2)]D_{\rho\nu}(k)。$$

如果令

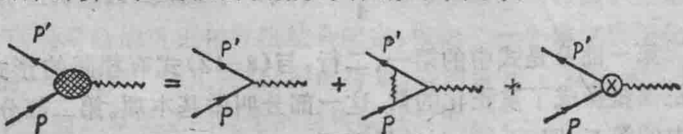
$$Z_3=1+e^2\pi(0),$$

那末，单圈近似下的光子传播子

$$D'_{\mu\nu}(k)=D_{\mu\nu}(k)+D_{\mu\lambda}(k)ie^2\pi_c(k^2)(k^\lambda k^\rho-g^{\lambda\rho}k^2)D_{\rho\nu}(k)$$

就是有限的了。发散被抵消项消除了。

**顶角** 我们还用(8-44)式表示的、重正化的电磁相互作用理论，来计算单圈近似的顶角。其图形和因子为



$$\Gamma'_\mu = \gamma_\mu + \Lambda_\mu + (Z_1 - 1)\gamma_\mu.$$

如前所述，单圈顶角因子是

$$\Lambda_\mu(p,p') = L\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p'),$$

$L$ 是发散的，$\Lambda_{c\mu}(p,p')$是有限的。把它代入上式，得

$$\begin{aligned}\Gamma'_\mu &= \gamma_\mu + L\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p') + (Z_1 - 1)\gamma_\mu \\ &= (1 + L + Z_1 - 1)\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p')。\end{aligned}$$

如果令

$$Z_1 = 1 - L,$$

就得到单圈近似下的顶角因子，为

$$\Gamma'_\mu(p,p') = \gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p'),$$

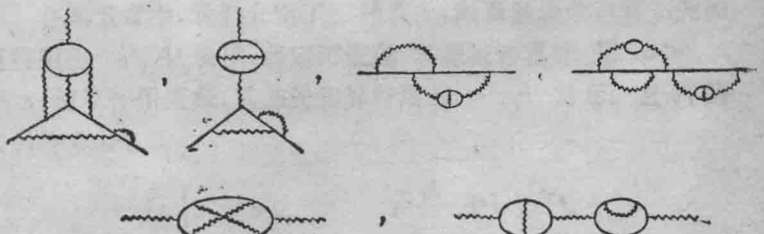
它们是有限的。发散被抵消项消除了。

由以上的论述看来，用抵消项抵消发散的重正化方法，和上一节讨论的相乘重正化方法是等价的。实际上，它们是一种方法的两种不同说法，而且是相辅相成的。这里论述的把理论重正化的一般规则，适用于其它可重正化的理论，它具有普遍的意义。

## 习 题 八

1．试判明：在第四章中论述的相互作用场理论，哪些可能是可以重正的，哪些是不可能重正的？

2．电磁相互作用中的下列图形：



(1) 哪些是正规的，哪些不是正规的？

(2) 绘出它们的骨架图形。

3. 有自相互作用的、实标量场$\phi^4$理论的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}\mu^2\phi^2-\frac{\lambda}{4}\phi^4,$$

(1) 判明它的可重性。

(2) 绘出它的基本发散图形。

(3) 写出相应的矩阵元。

(4) 按一般规则把它重正化。

# 第九章 海森堡表象中的格林函数

场的量子化，本书采用了正则量子化：场算符满足正则对易关系和正则运动方程。这时，态矢量是不随时间变化的，使场算符运动的是总哈密顿量。这样的描述，是属于海森堡表象。从第五章开始，我们的论述转到相互作用表象。相互作用表象的优点在于：场算符是自由场算符。在绝热近似下，初态和末态都看成自由粒子的状态。这样一来，我们就避开了求解相互作用的、非线性方程的问题，$S$矩阵元的计算用自由场进行，而所得结果却是描写相互作用过程的。利用微扰理论，进行了许多计算，得到了和实验符合得很好的结果。这是量子场论的成就。但是，在某些理论讨论中，采用相互作用表象就不方便。在强作用的计算中，不能采用微扰理论，再在相互作用表象中进行讨论，也不相宜。所以，又要起用海森堡表象。

## §1. 海森堡表象

在第五章中，我们介绍了三种表象：海森堡表象，其态矢和算符用 $|a>^h$、$A^h$ 表示；薛定谔表象，其态矢和算符 用 $|a>^s$、$A$ 表示；相互作用表象，其态矢和算符用 $|a>^I$、$A^I$ 表示。它们的各自特点是：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big|a>^h=0, \qquad i\frac{\partial}{\partial t}A^h=[H^h,\ 4^h];$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big|a>^s=H^s|a>^s,\quad i\frac{\partial}{\partial t}A^s=0; \qquad (9\text{-}1)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|a>^I = H_i^I\right|a>^I, i\frac{\partial}{\partial t}A^I = [H_0^I, A^I]。$$

它们之间的相互关系是：

$$|a>^s = e^{-iHt}|a>^h, A^s = e^{-iHt}A^h e^{iHt}, H^s = H^h;$$

$$|a>^I = e^{iH_0^s t}|a>^s, \quad A^I = e^{iH_0^s t}A^s e^{-iH_0^s t}, \quad H_0^I = H_0^s; \tag{9-2}$$

$$|a>^I = e^{iH_0^s t}e^{-iHt}|a>^h, A^I = e^{iH_0^s t}e^{-iHt}A^h e^{iHt}e^{-iH_0^s t}。$$

在 $t=0$ 时，三种表象的态矢、算符重合、相等。

这里，我们关心的是相互作用表象和海森堡表象之间的转换关系。令

$$u(t,0) = e^{iH_0^s t}\cdot e^{-iHt}, \tag{9-3}$$

$H = H^h = H^s$。由于 $H^s$ 和 $H_0^s$ 未必可以对易，上式右边不能写成 $e^{iH_0^s t - iH^s t} = e^{-iH_I^s t}$。则 (9-2) 式的第二式可以写成

$$|a>^I = u(t,0)|a>^h, \quad A^I = u(t,0)A^h u(t,0)^{-1}。 \tag{9-4}$$

由(9-3)式的定义可知，$u(t,0)$是归一的和幺正的

$$u(0,0) = 1, \qquad u(t,0)^+ = u(t,0)^{-1},$$

其运动方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,0) = -H_0^s e^{iH_0^s t}e^{-iHt} + e^{iH_0^s t}He^{-iHt}$$

$$= -H_0^I e^{iH_0^s t}e^{-iHt} + H^I e^{iH_0^s t}e^{-iHt},$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,0) = H_i^I u(t,0)。$$

把它和 (5-11) 式比较可知，$u(t,0)$ 就是由(5-9) 式定义的运动算符 $u(t,t')$ 在 $t'=0$ 时的特例。故有

$$u(0,t) = u(t,0)^{-1} = u(t,0)^+,$$

$$u(0,t) = e^{iHt}\cdot e^{-iH_0^s t}, \tag{9-5}$$

而表示相互作用表象和海森堡表象之间关系的 (9-4) 式，可以写成

$$|a>^h = u(0,t)|a>^I, \quad A^h = u(0,t)A^I u(t,0)。 \tag{9-6}$$

通过前面几章的论述，我们对相互作用表象中的态矢和算符，有比较清楚的认识。(9-6) 式使我们可以把熟悉的、相互作用表象中的态矢和算符，变换成我们所需要的、海森堡表象中的态矢和算符。

## §2. in 态和 out 态

在相互作用表象中，在绝热近似下，态矢量是自由场的态矢量。我们用 $|0\rangle$ 表示：什么粒子也没有的真空态矢

$$\hat{a}\,|0\rangle 0,$$

$\hat{a}$ 是任意粒子的消灭算符。我们用 $|a\rangle$ 表示：能量为 $E$、动量为 $\vec{k}$ 的态矢量

$$H_0^I|a\rangle = E|a\rangle,\ \vec{p}_0^I|a\rangle = \vec{k}\,|a\rangle。\qquad (9\text{-}7)$$

$H_0^I$、$\vec{p}_0^I$ 是相互作用表象中，自由场的哈密顿算符和动量算符。在绝热近似下，略去相互作用，自由场的能量和动量，就是总的能量和动量。

**定义和意义** 在 (9-5)式中，令 $t=-\infty$ 或 $t=\infty$，就得到 $u(0,-\infty)$ 或 $u(0,\infty)$。按 (5-11)式，它们使 $t=-\infty$ 或 $t=\infty$ 时的状态，运动到 $t=0$ 时的状态。据此，我们定义

$$\begin{aligned} |0\text{in}\rangle &= u(0,-\infty)|0\rangle, \\ |0\text{out}\rangle &= u(0,\infty)|0\rangle。\end{aligned}\qquad (9\text{-}8)$$

$t=\pm\infty$ 时，由于绝热近似，略去了相互作用，$|0\rangle$ 是无相互作用的真空态，常常被叫做裸真空。运动算符 $u(0,\pm\infty)$ 是由相互作用生成的

$$u(0,\pm\infty) = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!}\int_{\pm\infty}^0 dt_1 dt_2\cdots dt_n T H_i^I(t_1)H_i^I(t_2)\cdots H_i^I(t_n)。\qquad (9\text{-}9)$$

按 (9-8) 式定义的 $|0\text{in}\rangle$、$|0\text{out}\rangle$ 就包含了相互作用，就成为有相互作用的真空态，人们称之为物理真空。

同样，我们定义 in 态和 out 态的态矢量为

$$
\begin{aligned}
|a\text{in}\rangle &= u(0,-\infty)|a\rangle, \\
|a\text{out}\rangle &= u(0,\infty)|a\rangle。
\end{aligned}
\tag{9-10}
$$

它们也是由略去相互作用的自由粒子状态 $|a\rangle$ 运动而成的、包括相互作用的粒子状态。

由 (9-8) 式可知

$$
\langle 0\text{out}|0\text{in}\rangle = \langle 0|S|0\rangle \tag{9-11}
$$

表示真空起伏。在没有外场时，它是一个相因子。在计算中，常常被略去。在(9-10)式定义的 in、out 态中，也包含这个相因子。为了消除这个相因子，我们常常严格定义

$$
|a\text{in}\rangle = \frac{u(0,-\infty)|a\rangle}{\langle 0|S|0\rangle},
$$

$$
|a\text{out}\rangle = \frac{u(0,\infty)|a\rangle}{\langle 0|S|0\rangle},
$$

略去真空起伏的相因子后，它和 (9-10) 式等价。在往后的讨论中，为简便起见，我们用 (9-10) 式代表严格定义的 in 态和 out 态。

**李甫曼-许温格方程** 可以证明，由 (9-10) 式定义的 in 态和 out 态，满足李甫曼-许温格 (Lippmann-Schwinger) 方程

$$
\begin{aligned}
|a\text{in}\rangle &= |a\rangle + \frac{1}{E - H_0^s + i\varepsilon} H_i^s |a\text{in}\rangle, \\
|a\text{out}\rangle &= |a\rangle + \frac{1}{E - H_0^s - i\varepsilon} H_i^s |a\text{out}\rangle。
\end{aligned}
\tag{9-12}
$$

$H_0^s$、$H_i^s$ 是薛定谔表象中的自由场哈密顿量和相互作用哈密顿

量。$|a\rangle$ 是相互作用表象中绝热近似下的自由粒子态矢量。$|a\text{in}\rangle$、$|a\text{out}\rangle$ 是海森堡表象中包含相互作用的粒子状态矢量。(9-12)式中，出现三种不同表象中的算符和态矢，这是应该密切注意的。

现在，我们来证明方程 (9-12) 式。首先，我们知道：在绝热近似下，当 $t\to\pm\infty$时，要略去相互作用。为此，我们用 $e^{\varepsilon t}H_i^I(t)$ 取代$H_i^I(t)$。当 $t\to-\infty$ 时，$e^{\varepsilon t}H_i^I(t)\to 0$，满足绝热近似的要求。这时，按 (9-9) 式和 (9-10) 式第一式，有

$$
\begin{aligned}
|a\text{in}\rangle &= \sum_n \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{0} dt_1 dt_2\cdots dt_n e^{\varepsilon(t_1+t_2\cdots+t\ )} \\
&\quad TH_i^I(t_1)H_i^I(t_2)\cdots H_i^I(t\ )|a\rangle \\
&= |a\rangle - i\int_{-\infty}^{0} dt e^{\varepsilon t}H_i^I(t)|a\rangle \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} dt_1 dt_2 e^{\varepsilon(t_1+t_2)}TH_i^I(t_1)H_i^I(t_2)|a\rangle \\
&\quad +\cdots\cdots。
\end{aligned}
$$

$|a\rangle$ 是确定时刻 $t=\pm\infty$时 的态矢量，与积分无关。$H_i^I(t)$ 是与时间有关的算符，积分不便。为此，按 (9-2) 式第二式，换成薛定谔表象中的算符

$$
H_i^I(t) = e^{iH_0^s t}H_i^s\ e^{-iH_0^s t}
$$

$H_i^s$、$H_0^s=H_0^I$ 是与时间无关的，使积分易于进行。例如

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{t} dt_1 e^{\varepsilon t_1}H_i^I(t_1)|a\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{t} dt_1 e^{\varepsilon t_1} e^{iH_0^s t_1}H_i^s e^{-iH_0^s t_1}|a\rangle,
\end{aligned}
$$

由于

$$
H_0^s = H_0^I,\quad H_0^I|a\rangle = E|a\rangle,
$$

上式成为

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1 e^{-i(E-H_0^s+i\varepsilon)t_1} H_i^s|a>$$

$$=\frac{ie^{-i(E-H_0^s+i\varepsilon)t}}{E-H_0^s+i\varepsilon} H_i^s\Big|a>,$$

所以

$$-i\int_{-\infty}^{0} dte^{\varepsilon t} H_i^I(t)\ |a> = \frac{1}{E-H_0^s+i\varepsilon} H_i^s\Big|a>。$$

再者

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} dt_1 dt_2 e^{\varepsilon(t_1+t_2)} TH_i^I(t_1)H_i^I(t_2)\Big|a>$$

$$=\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t1} dt_2 e^{\varepsilon(t_1+t_2)} H_i^I(t_1)H_i^I(t_2)\Big|a>$$

$$=\int_{-\infty}^{t} dt_1 e^{\varepsilon t_1} H_i^I(t_1)\frac{ie-i(E-H_0^s+i\varepsilon)t_1}{E-H_0^s+i\varepsilon} H_i^s\Big|a>$$

$$=\int_{-\infty}^{t} dt_1 ie^{-i(E-H_0^s+i2\varepsilon)t_1} H_i^s \frac{1}{E-H_0^s+i\varepsilon} H_0^s\Big|a>$$

$$=i^2 e^{-i(E-\ H_0^s+i2\varepsilon)t} \qquad \frac{1}{E-H_0^s+i2e} H_i^s$$

$$\frac{1}{E-H_0^s+i\varepsilon} H_i^s\Big|a>,$$

考虑到 $\varepsilon\to 0$,就有

$$\frac{(-i)^2}{2}\int_{-\infty}^{0} dt_1 dt_2 e^{\varepsilon(t_1-t_2)} TH_i^I(t_1)H_i^I(t_2)\Big|a>$$

$$=\frac{1}{E-H_0^s+i\varepsilon} H_i^s \frac{1}{E-H_0^s+i\varepsilon} H_i^s\Big|a>。$$

依此类推，可以得到

$$\left|a\text{in}\right> = \left|a\right> + \frac{1}{E - H_0^s + i\varepsilon} H_i^s \left|a\right>$$

$$+ \frac{1}{E - H_0^s + i\varepsilon} H_i^s \frac{1}{E - H_0^s + i\varepsilon} H_i^s \left|a\right> + \cdots\cdots。$$

这就是李甫曼-许温格方程（9-12）式的第一式。第二式可以同样证明。差别在于，把绝热因子换成 $e^{-\varepsilon t}$，当 $t \to \infty$ 时，$e^{-\varepsilon t} H_i^I(t) \to 0$。正是这个差别，确定了 $\pm\varepsilon$ 的不同。

**能量、动量本征态** 如（9-7）式所示，我们用 $|a>$ 表示自由场能量、动量的本征态。在绝热近似下，相互作用被略去，自由场的能量、动量也就是场的总能量、总动量。由（9-8）式定义的 $|a\text{in}>$、$|a\text{out}>$ 状态，是由 $t = \pm\infty$ 时的状态 $|a>$ 历经相互作用而成的 $t = 0$ 时的状态。换句话说，它们是由相互作用激发形成的状态。相互作用是逐渐自发形成的，用 $e^{\pm\varepsilon t} H_i^I(t) \to H_i^I(t)$ 表示，没有附加的能量和动量。显然，在 $|a\text{in}>$、$|a\text{out}>$ 态中，其能量和动量仍然是 $E$ 和 $\vec{k}$。不过，这时的场是相互作用着的，在 $E$ 和 $\vec{k}$ 中，除自由场的能量、动量外，还有相互作用的部份。换句话说，$|a\text{in}>$、$|a\text{out}>$ 应该是总能量、动量的本征态，而本征值仍是 $E$ 和 $\vec{k}$，即

$$H|a\text{in}> = E|a\text{in}>, \quad \vec{p}\,|a\text{in}> = \vec{k}|a\text{in}>;$$

$$H|a\text{out}> = E|a\text{out}>, \quad \vec{p}\,|a\text{out}> = \vec{k}|a\text{out}>。 \tag{9-13}$$

以上只是直观的猜想。但它们的正确性是可以严格证明的。例如，以 $(E - H_0^s + i\varepsilon)$ 乘（9-12）式的第一式，得

$$(E - H_0^s + i\varepsilon)|a\text{in}> = (E - H_0^s + i\varepsilon)|\text{a}> + H_i^s|a\text{in}>。$$

由于

$$H_0^s = H_0^I, H_0^I|a> = E|a>, (E - H_0^s)|a> = 0,$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，上式成为

$$(H_0^s + H_i^s)|a\text{in}> = E|a\text{in}。$$

考虑到

$$H = H^h = H^s = H_0^s + H_i^s,$$

就有

$$H|a\text{in}> = E|a\text{in}>。$$

再者，$t=0$ 时，海森堡表象和相互作用表象重合

$$\vec{p} = \vec{p}^I(0) = \vec{p}_0^I,$$

把它作用于 (9-10) 式，得

$$\begin{aligned}\vec{p}|a\text{in}> &= \vec{p}u(0,-\infty)|a> \\ &= [\vec{p}, u(0,-\infty)]|a> + u(0,-\infty)\vec{p}|a> \\ &= [\vec{p}^I, u(0,-\infty)]|a> + \vec{k}|a\text{in}>。\end{aligned}$$

考虑到 (9-9) 式，

$$[\vec{p}^I, u(0,-\infty)] = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!}$$

$$\int_{-\infty}^0 dt_1 dt_2 \cdots dt_n T \sum_{j=1}^n H_i^I(t_1)\cdots[\vec{p}^I, H_i^I(t_j)]\cdots H_i^I(t_n),$$

而场的动量算符 $\vec{p}$，是空间平移变换的生成元，有

$$[\vec{p}^I, H_i^I(t_j)] = i\nabla H_i^I(t_j) = 0,$$

所以

$$[\vec{p}^I, u(0,-\infty)] = 0,$$

$$\vec{p}|a\text{in}> = \vec{k}|a\text{in}>。$$

对于 (9-13) 式的第二式，可以同样地予以证明。

**正交、归一、完备性** 如果 $|a>$ 是正交、归一、完备的，那末，由 $|a>$ 按(9-10) 式定义的 $|a\text{in}>$ 和 $|a\text{out}>$ 也都分别是正交、归一、完备的。实际上，$|a>$ 的正交、归一、完备性，用

$$<a|b> = \delta_{ab}, \quad \sum_a |a><a| = 1$$

表示。由于 $u(0,\pm\infty)$ 的幺正性

$$u(0,\pm\infty)^+ = u(0,\pm\infty)^{-1},$$

利用上式，就可以直接推知

$$<a\text{in}|b\text{in}> = <a|u(0,-\infty)^+ u(0,-\infty)|b>$$
$$= <a|b> = \delta_{ab},$$
$$<a\text{out}|b\text{out}> = <a|u(0,\infty)^+ u(0,\infty)|b>$$
$$= <a|b> = \delta_{ab},$$
$$u(0,\pm\infty)\sum_a |a><a|u(0,\pm\infty)^+ = 1,$$
$$\sum_a |a\text{in}><a\text{in}| = 1,$$
$$\sum_a |a\text{out}><a\text{out}| = 1。$$

$|a\text{in}>$ 或 $|a\text{out}>$ 的完备性，意味着不存在和它们正交的其它状态，特别是不存在和它们正交的束缚态。所以，自由粒子的态矢 $|a>$，不考虑相互作用，不涉及粒子的束缚态问题。$|a\text{in}>$、$|a\text{out}>$ 考虑了相互作用，也排除了束缚态的存在。在这样的理论框架中，是无法讨论粒子复合问题的。

## §3. in 场和 out 场

在 $t=0$ 的时候，三种表象是重合的，它们的态矢和算符是相等的。随着时间的变化，它们的发展是各不相同的。薛定谔表象中的算符，不随时间变化。相互作用表象中的算符，由自由哈密顿量控制它们的变化。海森堡表象中的算符，由总哈密顿量推动它们变化，并且满足正则对易关系

$$\dot{\phi}_\alpha(x) = i[H, \phi_\alpha(x)], \quad \dot{\pi}_\alpha(x) = i[H, \pi_\alpha(x)],$$

$$[\phi_\alpha(\vec{x}, t), \pi_\beta(\vec{x}', t)] = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \cdots\cdots$$

由于 $H = H_0 + H_i$，$H_i$ 中有场量的三次方以上的项，运动方程

是非线性的，求解是困难的。人们总想避开非线性方程的求解问题，而又能得到所需要的结果。在相互作用表象中，能达到这个目的。在海森堡表象中，在特殊情况下，也能部分地达到这个目的。

**定义** 如前所述，$u(0,\pm\infty)$ 是使 $t=\pm\infty$ 时的状态，运动成为 $t=0$ 时的状态的算符，不包含时间变量，用作随时间变化的算符的表象变换，是不恰当的。因此，我们把它作时间平移，定义与时间有关的运动算符

$$V(t,\pm\infty)=e^{iHt}u(0,\pm\infty)e^{-iHt}。\tag{9-14}$$

显然，它满足正则运动方程

$$\dot{V}(t,\pm\infty)=i[H,V(t,\pm\infty)],$$

$H$ 是海森堡表象中的总哈密顿量，$V$ 是幺正的。

用 (9-14) 式定义的 $V(t,\pm\infty)$ 算符，将海森堡表象中的场算符 $\phi_a(x)$，及其正则共轭动量 $\pi_a(x)$，作一幺正变换，定义 in 场和 out 场为

$$\begin{aligned}
\phi_{in}(x)&=V(t,-\infty)\phi(x))V(t,-\infty)^{-1},\\
\pi_{in}(x)&=V(t,-\infty)\pi(x)V(t,-\infty)^{-1},\\
\phi_{out}(x)&=V(t,\infty)\phi(x)V(t,\infty)^{-1},\\
\pi_{out}(x)&=V(t,\infty)\pi(x)V(t,\infty)^{-1}。
\end{aligned}\tag{9-15}$$

**海森堡算符** $\phi(x)$、$\pi(x)$ 表示任一种场的任一分量的海森堡算符，满足正则对易关系和正则运动方程

$$[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\cdots\cdots$$

$$\dot{\phi}(x)=i[H,\phi(x)],\qquad \dot{\pi}(x)=i[H,\pi(x)]。$$

由它们按 (9-14) 式、(9-15) 式定义的 in 场和 out 场，也满足同样的正则对易关系和正则运动方程，也是海森堡表象中的算符。实际上，例如

$$[\phi_{in}(\vec{x},t),\pi_{in}(\vec{x}',t)]$$

$$=[V(t,-\infty)\phi(\vec{x},t)V^{-1}(t,-\infty),$$

$$V(t,-\infty)\pi(\vec{x}',t)V^{-1}(t,-\infty)]$$

$$=V(t,-\infty)[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]V(t,-\infty)^{-1}$$

$$=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{in}(x)=&\dot{V}(t,-\infty)\phi(x)V(t,-\infty)^{-1}\\&+V(t,-\infty)\dot{\phi}(x)V(t,-\infty)^{-1}\\&+V(t,-\infty)\phi(x)\dot{V}(t,-\infty)^{-1}\\=&i[H,V(t,-\infty)]\phi(x)V(t,-\infty)^{-1}\\&+V(t,-\infty)i[H,\phi(x)]V(t,-\infty)^{-1}\\&+V(t,-\infty)\phi(x)i[H,V(t,-\infty)^{-1}]\\=&iHV(t,-\infty)\phi(x)V(t,-\infty)^{-1}\\&-iV(t,-\infty)\phi(x)V(t,-\infty)^{-1}H\end{aligned}$$

$$\dot{\phi}_{in}(x)=i[H,\phi_{in}(V)]。$$

仿此，就可以证明

$$[\phi_{in}(\vec{x},t),\pi_{in}(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\cdots\cdots$$

$$\dot{\phi}_{in}(x)=i[H,\phi_{in}(x)],\quad \dot{\pi}_{in}(x)=i[H,\pi_{in}(x)], \tag{9-16}$$

$$[\phi_{out}(\vec{x},t),\pi_{out}(\vec{x}',t)]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\cdots\cdots$$

$$\dot{\phi}_{out}(x)=i[H,\phi_{out}(x)],\quad \dot{\pi}_{out}(x)=i[H,\pi_{out}(x)],$$

$H$ 是海森堡表象中的总哈密顿算符。正是在这个意义上，我们说in 场和 out 场都是海森堡算符。

**自由场算符** 另一方面，由 (9-7) 式、(9-13) 式

$$H_0^I|a\rangle=E|a\rangle,\quad H|a\text{in}\rangle=E|a\text{in}\rangle$$

可以推知

$$Hu(0,\pm\infty)|a\rangle=u(0,\pm\infty)H_0^I|a\rangle$$

$$= Eu(0, \pm\infty)|a\rangle。$$

由于 $|a\rangle$ 是任意的，故有

$$Hu(0, \pm\infty) = u(0, \pm\infty)H_0^I。\tag{9-17}$$

这里的 $H$，也是海森堡表象中的总哈密顿算符。

再者，$H$ 是时间平移的生成元，有

$$\begin{aligned}
H(t) &= e^{iHt}H(0)e^{-iHt} \\
&= e^{iHt}H(0)u(0, \pm\infty)u^{-1}(0, \pm\infty)e^{-iHt} \\
&= e^{iHt}u(0, \pm\infty)H_0^I(0)u^{-1}(0, \pm\infty)e^{-iHt} \\
&= V(0, \pm\infty)e^{iHt}H_0^I(0)\, e^{-iHt}V(0, \pm\infty)^{-1} \\
&= V(0, \pm\infty)e^{iHt}H_0(0)e^{-iHt}V(0, \pm\infty)^{-1} \\
&= V(0, \pm\infty)H_0(t)V(0, \pm\infty)^{-1},
\end{aligned}$$

$$H(t) = H_0^{in}(t) = H_0^{out}(t),$$

这使（9-16）式中的运动方程成为

$$\begin{aligned}
&\dot{\phi}_{in}(x) = i[H_{in}^0, \phi_{in}(x)], \quad \dot{\pi}_{in}(x) = i[H_{in}^0, \pi_{in}(x)], \\
&\dot{\phi}_{out}(x) = i[H_{out}^0, \phi_{out}(x)], \\
&\dot{\pi}_{out}(x) = i[H_{out}^0, \pi_{out}(x)]。
\end{aligned}\tag{9-18}$$

这意味着，in 场和 out 场又都是自由场算符，又都有平面波解，例如

$$\begin{aligned}
&\phi_{in}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a_{in}(k)e^{-ikx} + b_{in}^{+}(k)e^{+ikx}], \\
&A_\mu^{in}(x) = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e_\mu(k,\lambda)[a_{in}(k,\lambda)e^{-ikx} \\
&\qquad + \bar{a}_{in}(k,\lambda)e^{+ikx}],
\end{aligned}\tag{9-19}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{in}(x) = \sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{VE}}[&C_{in}(p,\lambda)u(p,\lambda)e^{-ipx} \\
&+ d_{in}^{+}(p,s)v(p,s)e^{ipx}],
\end{aligned}$$

$a_{\text{in}}$、$b^+_{\text{in}}$、$c_{\text{in}}$、$d^+_{\text{in}}$ …等是 in 粒子的产生、消灭算符。对于 out 场，有类似的表示式。

可以证明：上一节引进的 in 态和 out 态，可以由 in 产生算符生成。例如

$$|a\text{in}\rangle = a^+_{\text{in}}|0\text{in}\rangle, \quad |a\text{out}\rangle = a^+_{\text{out}}|0\text{out}\rangle\cdots\cdots \tag{9-20}$$

其正确性，由算符矩阵元的等价，如

$$\langle a\text{in}|\phi^A_{\text{in}}(x_1)\phi^B_{\text{in}}(x_2)\cdots\phi^N_{\text{in}}(x_n)|b\text{in}\rangle$$
$$=\langle a|\phi^I_A(x_1)\phi^I_B(x_2)\cdots\phi^I_N(x_n)|b\rangle \tag{9-21}$$

显示出来。我们证明上式是成立的，也就证明了上面的论述是正确的。

由 (9-15) 式和 (9-14) 式，知

$$\phi_{\text{in}}(x) = e^{iHt}u(0,-\infty)e^{-iHt}\phi(x)e^{iHt}u(0,-\infty)^{-1}e^{-iHt}$$
$$= e^{iHt}u(0,-\infty)\phi(\vec{x},0)u(0,-\infty)^{-1}e^{-iHt}$$
$$= e^{iHt}u(0,-\infty)\phi^I(\vec{x},0)u(0,-\infty)^{-1}e^{-iHt}$$
$$= u(0,-\infty)e^{iH_0^{\mp}t}\phi^I(\vec{x},0)e^{-iH_0^{\pm}t}u(0,-\infty)^{-1}$$
$$= u(0,-\infty)\phi^I(x)u(0,-\infty)^{-1}。$$

第一个等式是定义，第二个等式是时间平移，第三个等式是 $t=0$ 时三表象重合，第四个等式是由于 (9-17) 式，第五个等于是自由场算符的时间平移。结果是

$$\begin{aligned}\phi_{\text{in}}(x) &= u(0,-\infty)\phi^I(x)u(0,-\infty)^{-1},\\ \phi_{\text{out}}(x) &= u(0,\infty)\phi^I(x)u(0,-\infty)^{-1}。\end{aligned} \tag{9-22}$$

这个结果是重要的，也可以看作 in 场和 out 场的定义。

把 (9-22) 式代入 (9-21) 式的左边，得

$$\langle a\text{in}|\phi^A_{\text{in}}(x_1)\phi^B_{\text{in}}(x_2)\cdots\phi^N_{\text{in}}(x_n)|b\text{in}\rangle$$
$$=\langle a|u(0,-\infty)^{-1}\cdot u(0,-\infty)\phi^A_I(x_1)u(0,-\infty)^{-1}\cdot$$
$$u(0,-\infty)\phi^B_I(x_2)u(0,-\infty)^{-1}\cdots u(0,-\infty)\phi^N_I(x_n)$$
$$u(0,-\infty)^{-1}\cdot u(0,-\infty)|b\rangle$$

$$= \langle a|\phi_I^A(x_1)\phi_I^B(x_2)\cdots\phi_I^N(x_n)|b\rangle。$$

这表明：in 态、in 场和相互作用表象中的态矢和算符，在描述物理过程方面是等价的。实质上，它们是由幺正算符 $u(0,-\infty)$ 联系着的等价表象。

**杨-惠特曼方程** in 场、out 场，按定义(9-15)式，与海森堡场联系着。由此可以导出杨-惠特曼(Yang-Feldman)方程，以又一种方式把它们联系起来。为简单起见，我们以标量场 $\phi(x)$ 为例，导出杨-惠特曼方程。

按定义(9-15)式，有

$$\phi_{in}(\vec{x},0) = u(0,-\infty)\phi(\vec{x},0)u(0,-\infty)^{-1}$$

$$= \phi(\vec{x},0) + [u(0,-\infty),\phi(\vec{x},0)]u(0,-\infty)^{-1}$$

$$= \phi(\vec{x},0) + \sum_n \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^0 d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n$$

$$T\sum_{j=1}^n \mathscr{H}_i^I(x_1)\cdots[\mathscr{H}_i^I(x_j),\phi(\vec{x},0)]\cdots\mathscr{H}_i^I(x_n)$$

$$u(0,-\infty)^{-1}。$$

$t=0$ 时，三种表象重合，$\phi(\vec{x},0)=\phi^I(\vec{x},0)$，

$$[\mathscr{H}_i^I(x_j),\phi^I(\vec{x},0)] = \frac{\partial\mathscr{H}_i^I(x_j)}{\partial\phi^I(x_j)}[\phi^I(x_j),\phi^I(\vec{x},0)]。$$

右边乘积是标量流和对易函数

$$J^I(x_j) = \frac{\partial\mathscr{H}_i^I(x_j)}{\partial\phi^I(x_j)},$$

$$[\phi^I(x_j),\phi^I(\vec{x},0)] = -i\Delta(\vec{x}-\vec{x}_j,-t_j), \tag{9-23}$$

由此可知

$$[u(0,-\infty),\phi(\vec{x},0)]$$

$$= \sum_n \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^0 d^4x_1 d^4x_2$$

$$\cdots d^4x_n T\sum_{j=1}^{n}\mathscr{H}_i^I(x_1)\cdots[\mathscr{H}_i^I(x_j),\phi(\vec{x},0)]\cdots\mathscr{H}_i^I(x_n)$$

$$=\sum_n\frac{(-i)^n}{n!}n\int_{-\infty}^0 d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_n$$

$$T[\mathscr{H}_i^I(x_1),\phi(\vec{x},0)]\mathscr{H}_i^I(x_2)\cdots\mathscr{H}_i^I(x_n)$$

$$=-\sum_n\frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!}\int_{-\infty}^0 d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_n$$

$$TJ^I(x_1)\Delta(\vec{x}-\vec{x}_1,-t_1)\mathscr{H}_i^I(x_2)\cdots\mathscr{H}_i^I(x_n)$$

$$=-\int_{-\infty}^0 d^4y\Delta(\vec{x}-\vec{y},-y_0)TJ^I(y)u(0,-\infty)。$$

由于 $y_0<0$ 和 (9-6) 式，有

$$\begin{aligned}TJ^I(y)u(0,-\infty)&=u(0,y_0)J^I(y)u(y_0,-\infty)\\&=u(0,y_0)J^I(y)u(y_0,0)u(0,-\infty)\\&=J(y)u(0,-\infty),\end{aligned}$$

代回上式，得

$$[u(0,-\infty),\phi(\vec{x},0)]u(0,-\infty)^{-1}$$

$$=-\int_{-\infty}^0 d^4y\Delta(\vec{x}-\vec{y},-y_0)J(y),$$

$$\phi_{in}(\vec{x},0)=\phi(\vec{x},0)-\int_{-\infty}^0 d^4y\Delta(\vec{x}-\vec{y},-y_0)J(y)。$$

上式中的诸算符，都是海森堡表象中的算符，时间平移由$H$生成，即

$$\phi_{in}(x)=e^{iHt}\phi_{in}(\vec{x},0)e^{-iHt},\ \phi(x)=e^{iHt}\phi(\vec{x},0)e^{-iHt},$$

$$J(\vec{y},y_0+x_0)=e^{iHt}J(y)e^{-iHt}。$$

因此，由上式推知

$$\phi_{in}(x)=\phi(x)-\int_{-\infty}^0 d^4y\Delta(\vec{x}-\vec{y},-y_0)J(\vec{y},y_0+x_0),$$

对 $y_0$ 的积分，作变数变换 $y_0 \to y_0 + x_0$，得

$$\phi_{in}(x) = \phi(x) - \int_{-\infty}^{x_0} d^4y \Delta(x-y) J(y)。 \qquad (9\text{-}24)$$

对于 out 场作同样的讨论，可以得到类似结果

$$\phi_{out}(x) = \phi(x) + \int_{x_0}^{\infty} d^4y \Delta(x-y) J(y)。 \qquad (9\text{-}25)$$

二式相减，得

$$\phi_{out}(x) - \phi_{in}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4y \Delta(x-y) J(y)。 \qquad (9\text{-}26)$$

这些方程就是标量场的杨-惠特曼方程。它们给出 in 场、out 场与海森堡场间的、意义更清晰的一种联系。在 $t \to \pm\infty$ 的极限情况下

$$\lim_{t\to-\infty}\left( \phi_{in}(x) = \phi(x) \right), \quad \lim_{t\to\infty}\left( (\phi_{out}(x) = \phi(x) \right),$$

它们与海森堡场相等。

## §4. 格林函数

格林函数，由于它既和有明确意义的物理量紧密相联，又具有一般的普遍性质，而成为物理理论研究、学习的重要课题。在海森堡表象中，它有简洁的形式，便于论述。在本节中，我们给出它的表示式，阐明它的基本意义。

**自由传播子** 为此，我们先回顾一下自由传播子。如(3-162)式、(3-163)式、(3—165)式、(3-166)式、(3-168)式所示，它们是

$$i\Delta_f(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i\Delta_f(k) e^{-ik(x_1-x_2)},$$

$$i\Delta_f(k) = \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon};$$

$$is_f(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} is_f(p) e^{-ip(x_1-x_2)}, \qquad (9\text{-}27)$$

$$is_f(p) = \frac{i}{\gamma\cdot p - m + i\varepsilon};$$

$$iD^f_{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}iD^f_{\mu\nu}(k)e^{-ik(x_1-x_2)},$$

$$iD^f_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig\mu\nu}{k^2 + i\varepsilon}。$$

它们是相互作用表象中的场算符，即自由场算符的两点格林函数

$$\begin{aligned} i\Delta_f(x_1 - x_2) &= \langle 0|T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)|0\rangle, \\ iS_f(x_1 - x_2) &= \langle 0|T\psi_I(x_1)\overline{\psi_I}(x_2)|0\rangle, \qquad (9\text{-}28) \\ iD^f_{\mu\nu}(x_1 - x_2) &= \langle 0|TA^I_\mu(x_1)A^I_\nu(x_2)|0\rangle。 \end{aligned}$$

**两点格林函数** 自由传播子是两个自由场的编时乘积在裸真空之间的平均值。现在，我们把相互作用表象中的算符换成海森堡表象中的算符，即把自由场算符换成相互作用场算符；并把裸真空换成物理真空，定义两点格林函数为

$$\begin{aligned} i\Delta'_f(x_1 - x_2) &= \langle 0\text{out}|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\text{in}\rangle, \\ iS'_f(x_1 - x_2) &= \langle 0\text{out}|T\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0\text{in}\rangle, \qquad (9\text{-}29) \\ iD'^f_{\mu\nu}(x_1 - x_2) &= \langle 0\text{out}|TA_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\text{in}\rangle。 \end{aligned}$$

可以证明，它们就是完全传播子，因而上式左边就采用了完全传播子的符号。在严格的定义中，上式右边还应除以$\langle 0\text{out}|0\text{in}\rangle$。为简便起见，我们略去了这个因子。

物理真空与裸真空，按 (9-8) 式联系

$$|0\text{in}\rangle = u(0,-\infty)|0\rangle,\quad |0\text{out}\rangle = u(0,\infty)|0\rangle, \qquad (9\text{-}30)$$

海森堡表象中的算符和相互作用表象中的算符，按 (9-6) 式变换

$$\begin{aligned} \phi(x) &= u(0,t)\phi^I(x)u(0,t)^{-1}, \\ \psi(x) &= u(0,t)\psi^I(x)u(0,t)^{-1}, \qquad (9\text{-}31) \\ A_\mu(x) &= u(0,t)A^I_\mu(x)u(0,t)^{-1}。 \end{aligned}$$

把它们代入 (9-29) 式右边，就得到

$$\langle 0\text{out}|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\text{in}\rangle$$
$$=\langle 0|u(\infty,0)Tu(0,t_1)\phi^I(x_1)u(t_1,0)u(0,t_2)$$
$$\phi^I(x_2)u(t_2,0)u(0,-\infty)|0\rangle,$$

当 $t_1>t_2$ 时，

$$\langle 0\text{out}|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\text{in}\rangle$$
$$=\langle 0|u(\infty,t_1)\phi^I(x_1)u(t_1,t_2)\phi^I(x_2)u(t_2,-\infty)|0\rangle$$
$$=\langle 0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)S|0\rangle,$$

当 $t_2>t_1$ 时，进行类似的讨论，可以得到同样的结果。因此，我们得到 (9-29) 式的另一表示式

$$i\Delta_f'(x_1-x_2)=\langle 0\text{out}|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\text{in}\rangle$$
$$=\langle 0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)S|0\rangle,$$
$$iS'_f(x_1-x_2)=\langle 0\text{out}|T\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0\text{in}\rangle$$
$$=\langle 0|T\psi^I(x_1)\overline{\psi}^I(x_2)S|0\rangle, \tag{9-32}$$
$$iD_{\mu\nu}^{f\,\prime}(x_1-x_2)=\langle 0\text{out}|TA_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\text{in}\rangle$$
$$=\langle 0|TA_\mu^I(x_1)A_\nu^I(x_2)S|0\rangle。$$

将$S$矩阵作微扰展开

$$S=\sum_n\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4y_1d^4y_2\cdots d^4y_n$$
$$T\mathscr{H}_i^I(x_1)\mathscr{H}_i^I(x_2)\cdots\mathscr{H}_i^I(x_n) \tag{9-33}$$

并代入上式，就可以看出它的意义。例如

$$\langle 0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)S|0\rangle$$
$$=\sum_n\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4y_1d^4y_2\cdots d^4y_n$$
$$\langle 0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\mathscr{H}_i^I(y_1)\mathscr{H}_i^I(y_2)\cdots\mathscr{H}_i^I(y_n)|0\rangle$$
$$=\langle 0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)|0\rangle-i\int d^4y$$
$$\langle 0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\mathscr{H}_i^I(y)|0\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\int d^4y_1d^4y_2\langle 0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\mathscr{H}_i^I(y_1)\mathscr{H}_i^I(y_2)|0\rangle$$

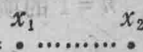
$+\cdots$

算符的 $T$ 乘积，按威克定理，可以展开为包含所有可能收缩的正规乘积之和。其真空平均值，只有那些算符全被收缩的项才不为零。设

$$\mathscr{H}_i^I(x)=ie\overline{\psi^I}(x)\gamma_5\psi^I(x)\phi^I(x), \tag{9-34}$$

每个 $\mathscr{H}_i^I(x)$ 中只有一个标量场算符 $\phi^I(x)$。以上展开式中，$n$ 项中包含 $n+2$ 个 $\phi^I(x)$ 场算符。当 $n=$ 奇数时，项中有奇数个 $\phi^I(x)$，不能完全收缩掉，故其真空平均值为零。不为零的，只是 $n=$ 偶数的项。

$n=0$ 的项，为

$$<0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)|0>=i\Delta_f(x_1-x_2)=$$ 


是人们熟知的自由传播子。

$n=2$ 的项，为

$$-\frac{1}{2}\int d^4y_1d^4y_2<0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\mathscr{H}_i^I(y_1)\mathscr{H}_i^I(y_2)|0>$$

$$=e^2\int d^4y_1d^4y_2\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\phi^I(y_1)\phi^I(y_2)$$

$$\overline{\psi^I}(y_1)\gamma_5\psi^I(y_1)\overline{\psi^I}(y_2)\gamma_5\psi^I(y_2)$$

$$=-e^2\int d^4y_1d^4y_2\Delta_f(x_1-y_1)\Delta_f(x_2-y_2)$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_5S_f(y_1-y_2)\gamma_5S_f(y_2-y_1)=$$ 


如此论证，就可以推知，由(9-29)式、(9-32)式定义的两点格林函数，确实是完全传播子。

**三点格林函数** 三个场算符的$T$乘积在物理真空态间的平均值，都属三点格林函数。在有意义的物理量中，费米场都成对出现。所以，人们关心的三点格林函数，定义为

$$G_3(x,y,z)=<0\text{out}|T\psi(x)\overline{\psi}(y)\phi(z)|0\text{in}>。 \tag{9-35}$$

由（9-30）式、(9-31）式可知，上式可以写成

$$G_3(x,y,z)=\langle 0\text{out}|T\psi(x)\overline{\psi}(y)\phi(z)|0\text{in}\rangle$$

$$=\langle 0|T\psi^I(x)\overline{\psi}^I(y)\phi^I(z)S|0\rangle。$$

把 $S$ 矩阵的展开式（9-33）式代入上式，得

$$G_3(x,y,z)=\sum_n\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_n$$

$$\langle 0|T\psi^I(x)\psi^I(y)\overline{\phi^I}(z)\mathscr{H}_i^I(x_1)\mathscr{H}_i^I(x_2)\cdots\mathscr{H}_i^I(x_n)|0\rangle,$$

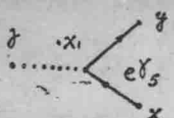
如果 $\mathscr{H}_i^I(x)$ 取（9-34）式的形式，那末上式中 $n=$ 偶数的项都等于零，不等于零的，只有 $n=$ 奇数的项。

$n=1$ 的项，为

$$e\int d^4x_1\langle 0|T\psi^I(x)\overline{\psi}^I(y)\phi^I(z)\overline{\psi}^I(x_1)\gamma_5\psi^I(x_1)\phi^I(x_1)|0\rangle$$

$$=e\int d^4x_1\psi^I(x)\overline{\psi}^I(y)\phi^I(z)\overline{\psi}^I(x_1)\gamma_5\psi^I(x_1)\phi^I(x_1)$$

$$=\int d^4x_1iS_f(x-x_1)e\gamma_5iS_f(x_1-y)i\Delta_f(x_1-z)$$

$=$ 


显然，它是联系着三根自由传播子的简单顶角。换句话说，把它的外腿——三条自由传播子截掉以后，剩下的就是简单顶角。

$n=3$ 的项，为

$$\frac{(-i)^3}{3!}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3$$

$$\langle 0|T\psi^I(x)\overline{\psi}^I(y)\phi^I(z)\overline{\psi}^I(x_1)ie\gamma_5\psi^I(x_1)\phi^I(x_1)$$

$$\overline{\psi}^I(x_2)ie\gamma_5\psi^I(x_2)\phi^I(x_2)\overline{\psi}^I(x_2)ie\gamma_5\psi^I(x_3)\phi^I(x_3)|0\rangle$$

$$=e^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3$$

$$\psi^I(x)\bar{\psi}^I(y)\bar{\psi}^I(x_1)\gamma_5\psi^I(x_1)\bar{\psi}^I(x_2)\gamma_5\psi^I(x_2)\bar{\psi}^I(x_3)\gamma_5\psi^I(x_3)$$

$$\phi^I(z)\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\phi^I(x_3) + e^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3$$

$$\psi^I(x)\bar{\psi}^I(y)\bar{\psi}^I(x_1)\gamma_5\psi^I(x_1)\bar{\psi}^I(x_2)\gamma_5\psi^I(x_2)\bar{\psi}^I(x_3)\gamma_5\psi^I(x_3)$$

$$\phi^I(z)\phi^I(x_1)\psi^I(x_2)\phi^I(x_3) + e^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3$$

$$\psi^I(x)\bar{\psi}^I(y)\bar{\psi}^I(x_1)\gamma_5\psi^I(x_1)\bar{\psi}^I(x_2)\gamma_5\psi^I(x_2)\bar{\psi}^I(x_3)\gamma_5\psi^I(x_3)$$

$$\phi^I(z)\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\phi^I(x_3) + e^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3$$

$$\psi^I(x)\bar{\psi}^I(y)\bar{\psi}^I(x_1)\gamma_5\psi^I(x_1)\bar{\psi}^I(x_2)\gamma_5\psi^I(x_2)\bar{\psi}^I(x_3)\gamma_5\psi^I(x_3)$$

$$\phi^I(z)\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\phi^I(x_3)$$

$$= e^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3 iS_f(y-x_2)\gamma_5 iS_f(x_2-x_1)\gamma_5 iS_f(x_1-x_3)$$

$$\gamma_5 iS_f(x_3-x)i\Delta_f(z-x_1)i\Delta_f(x_2-x_3)$$

$$+ e^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3 iS_f(y-x_3)\gamma_5 iS_f(x_3-x)$$

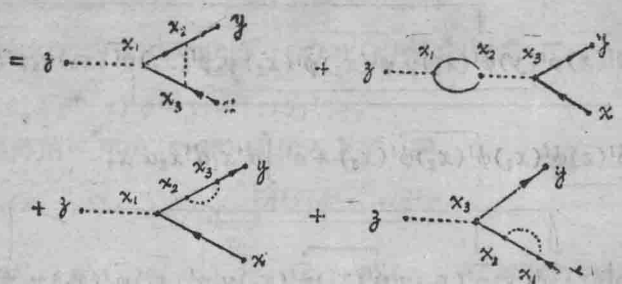
$$(-\mathrm{Tr})iS_f(x_2-x_1)\gamma_5 iS_f(x_1-x_2)\gamma_5 i\Delta_f(z-x_1)i\Delta_f(x_2-x_3)$$

$$+ e^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3 iS_f(y-x_3)\gamma_5 iS_f(x_3-x_2)\gamma_5 iS_f(x_2-x_1)$$

$$\gamma_5 iS_f(x_1-x)i\Delta_f(z-x_1)i\Delta_f(x_2-x_3)$$

$$+ e^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3 iS_f(y-x_3)\gamma_5 iS_f(x_3-x_2)\gamma_5 iS_f(x_2-x_1)$$

$$\gamma_5 iS_f(x_1-x)i\Delta_f(z-x_3)i\Delta_f(x_2-x_1)$$



它们都是联接着三条外腿的三点顶角。

对于 $n=5,7,\cdots$ 等的项，进行如上所述的论证，就可以推知：由（9-35）式定义的三点格林函数，是联接着三条外腿的完全顶角，而且这三条外腿都是完全传播子。如果用 $e\Gamma'_5(x_1,x_2,x_3)$ 表示三点完全顶角，用 $iS'_f(x-x_1)$、$i\Delta'_f(x-x_1)$ 表示完全传播子，那末由（9-35）式定义的三点格林函数，就可以写成

$$G_3(x,y,z)=\langle 0\text{out}|T\psi(x)\overline{\psi}(y)\phi(z)|0\text{in}\rangle$$
$$=\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3\,iS'_f(x-x_1)e\Gamma'_5(x_1,x_2,x_3)$$
$$iS'_f(x_2-y)i\Delta'_f(x_3-z), \tag{9-36}$$

这就显示出三点格林函数的意义。当然，在以上论述中，我们既未写出 $\langle 0\text{out}|0\text{in}\rangle$ 因子，也略去了不连接图形。细心的读者，应该予以注意。

**n 点格林函数** $n$ 个场算符的 $T$ 乘积，在真空态间的平均值，叫做 $n$ 点格林函数。相互作用表象中的算符 $\phi^I_\alpha(x)$ 和 in 场、out 场算符，都是自由场算符。它们由（9-22）式

$$\phi^\alpha_{\text{in}}(x)=u(0,-\infty)\phi^\alpha_I(x)u(0,-\infty)^{-1}, \tag{9-37}$$
$$\phi^\alpha_{\text{out}}(x)=u(0,\infty)\phi^\alpha_I(x)u(0,\infty)^{-1}$$

联系着。所以，自由场算符的格林函数，有三种表示式

$$G^0_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\langle 0|T\phi^A_I(x_1)\phi^B_I(x_2)\cdots\phi^N_I(x_n)|0\rangle,$$
$$G^0_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\langle 0\text{in}|T\phi^A_{\text{in}}(x_1)\phi^B_{\text{in}}(x_2)$$

$$\cdots\phi_{in}^{N}(x_n)|0in>,\qquad(9\text{-}38)$$

$$G_n^0(x_1,x_2,\cdots,x_n)=<0out|T\phi_{out}^{A}(x_1)\phi_{out}^{B}(x_2)\cdots\phi_{out}^{N}(x_n)|0out>,$$

它们是等价的，故都以 $G_n^0(x_1x_2\cdots x_n)$ 记之。

它们的等价性，由 (9-8) 式、(9-37) 式就可证明。实际上

$$\begin{aligned}&<0in|T\phi_{in}^{A}(x_1)\phi_{in}^{B}(x_2)\cdots\phi_{in}^{N}(x_n)|0in>\\&=<0|u(0,-\infty)^{-1}Tu(0,-\infty)\phi_I^A(x_1)u(0,-\infty)^{-1}\\&\quad u(0,-\infty)\phi_I^B(x_2)u(0,-\infty)^{-1}\cdots u(0,-\infty)\phi_I^N(x_n)\\&\quad u(0,-\infty)^{-1}u(0,-\infty)|0>\\&=<0|T\phi_I^A(x_1)\phi_I^B(x_2)\cdots\phi_I^N(x_n)|0>。\end{aligned}$$

同理可证

$$\begin{aligned}&<0out|T\phi_{out}^{A}(x_1)\phi_{out}^{B}(x_2)\cdots\phi_{out}^{N}(x_n)|0out>\\&=<0|T\phi_I^A(x_1)\phi_I^B(x_2)\cdots\phi_I^N(x_n)|0>。\end{aligned}$$

对于相互作用场算符的格林函数，按照两点格林函数、三点格林函数，通常定义为

$$G_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=<0out|T\phi^A(x_1)\phi^B(x_2)\cdots\phi^N(x_n)|0in>,\qquad(9\text{-}39)$$

$\phi^\alpha(x)$ 是海森堡表象中的场算符。这里，如前所述，未写出分母 $<0out|0in>$。这分母使(9-39)式定义的格林函数，实际上是连通格林函数。

考虑到 (9-8) 式和 (9-31) 式，(9-39) 式右边为

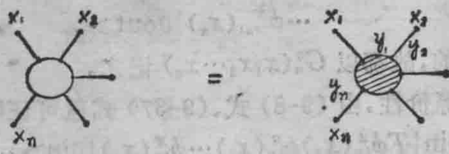
$$\begin{aligned}&<0out|T\phi^A(x_1)\phi^B(x_2)\cdots\phi^N(x_n)|in0>\\&=<0|u(\infty,0)Tu(0,t_1)\phi_I^A(x_1)u(t_1,0)u(0,t_2)\phi_I^B(x_2)\\&\quad u(t_2,0)\cdots u(0,t_n)\phi_I^N(x_n)u(t_n,0)u(0,-\infty)|0>,\end{aligned}$$

由此推知

$$\begin{aligned}&G_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=<0out|T\phi^A(x_1)\phi^B(x_2)\cdots\phi^N(x_n)|0in>\\&=<0|T\phi_I^A(x_1)\phi_I^B(x_2)\cdots\phi_I^N(x_n)S|0>。\qquad(9\text{-}40)\end{aligned}$$

这表明：$n$ 点格林函数，由连接着 $n$ 条完全传播子的 $n$ 点完全顶

角构成。可以用图形表示为




## §5. S矩阵元和约化公式

上一节，我们定义了包含相互作用的格林函数，论述了它和顶角、传播子的关系。现在，我们讨论它和 $S$ 矩阵元的关系。在海森堡表象中，$S$ 矩阵元有简单的表示式

$$S_{fi}=<f|S|i>=<f|u(\infty,-\infty)|i>$$

$$=<f|u(\infty,0)u(0,-\infty)|i>$$

$$S_{fi}=<f\mathrm{out}|i\mathrm{in}>, \tag{9-41}$$

它可以用格林函数表示，其表示式叫做约化公式。

**西岛公式**　为了导出约化公式，我们以标量场为例，首先证明西岛 (NishJima) 公式

$$\frac{\delta}{\delta\phi^I(y)}T[a^I(x_1)b^I(x_2)\cdots]$$

$$=i(\partial_y^2+m^2)T[\phi^I(y)a^I(x_1)b^I(x_2)\cdots]。 \tag{9-42}$$

$\phi^I(y)$、$a^I(x_1)$、$b^I(x_2)\cdots$ 是相互作用表象中的场算符，是自由场算符，而且满足方程

$$(\partial_y^2+m^2)\phi^I(y)=0,$$

$$(\partial_y^2+m^2)\underbrace{\phi^I(y)\phi^I}(x)=-i\delta^4(y-x)。 \tag{9-43}$$

按威克定理，(9-42) 式右边的 $T$ 乘积，可以展开为包含所有可能收缩的正规乘积之和

$$
\begin{aligned}
&T[\phi^I(y)a^I(x_1)b^I(x_2)\cdots]\\
&=:\phi^I(y)a^I(x_1)b^I(x_2)\cdots:+:\underbrace{\phi^I(y)a^I}(x_1)b^I(x_2)\cdots.\\
&\quad+:\underbrace{\phi^I(y)a^I(x_1)b^I}(x_2)\cdots:+:\phi^I\underbrace{(y)a^I(x_1)b^I(x_2)}\cdots:\\
&\quad+\ \phi^I(y)\underbrace{a^I(x_1)b^I}(x_2)\cdots:+:\phi^I(y)\underbrace{a^I(x_1)b^I(x_2)}\cdots:\\
&\quad+\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

把算符 $(\partial_y^2+m^2)$ 作用于上式，由于 (9-43) 式，可以得到

$$
\begin{aligned}
&(\partial_y^2+m^2)T[\phi^I(y)a^I(x_1)b^I(x_2)\cdots]\\
&=-i\delta^4(y-x_1)\delta_{\phi,a}:b^I(x_2)\cdots:+\cdots\\
&\quad+-i\delta^4(y-x_2)\delta_{\phi,b}:a^I(x_1)\cdots:+\cdots\\
&\quad+\cdots\\
&=-i\delta^4(y-x_1)\delta_{\phi,a}T[b^I(x_2)\cdots]\\
&\quad+-i\delta^4(y-x_2)\delta_{\phi,b}T[a^I(x_1)\cdots]\\
&\quad+\cdots。
\end{aligned}
$$

另一方面，根据泛函导数的求导规则

$$
\frac{\delta}{\delta\phi^I(y)}\phi^I(x)=\delta^4(x-y),
$$

(9-42) 式的左边为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\phi^I(y)}T[a^I(x_1)b^I(x_2)\cdots]\\
&\qquad=\delta^4(y-x_1)\delta_{\phi,a}T[b^I(x_2)\cdots]\\
&\qquad\quad+\delta^4(y-x_2)\delta_{\phi,b}T[a^I(x_1)\cdots]\\
&\qquad\quad+\cdots。
\end{aligned}
$$

与上式相比，就证明了 (9-42) 式的正确性。

**介子散射**　我们以介子散射过程为例，来导出 $S$ 矩阵元的约化公式。过程为

$$
\begin{matrix}\phi+\phi\rightarrow\phi'+\phi',\\ (k)\ (q)\ \ (k')\ (q')\end{matrix}
$$

初态和终态为

$$|i\rangle = |k,q\rangle = a^+(k)a^+(q)|0\rangle,$$

$$|f\rangle = |k',q'\rangle = a^+(k')a^+(q')|0\rangle, \tag{9-44}$$

$S$ 矩阵元为

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle k',q'|S|k,q\rangle。 \tag{9-45}$$

为了导出约化公式,我们将 $S$ 矩阵在 $\phi^I(x)=0$ 的邻域展开，即令

$$\begin{aligned} S = S_0 &+ \int d^4x\phi^I(x)\frac{\delta S_0}{\delta\phi^I(x)} \\ &+ \frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 \phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi^I(x_1)\delta\phi^I(x_2)} \\ &+ \frac{1}{3!}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\phi^I(x_3) \\ &\quad \frac{\delta^3 S_0}{\delta\phi^I(x_1)\delta\phi^I(x_2)\delta\phi^I(x_3)} \\ &+ \frac{1}{4!}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\phi^I(x_3)\phi^I(x_4) \\ &\quad \frac{\delta^4 S_0}{\delta\phi^I(x_1)\delta\phi^I(x_2)\delta\phi^I(x_3)\delta\phi(x_4)} + \cdots。 \end{aligned} \tag{9-46}$$

$S_0$ 及其导数如 $\delta S_0/\delta\phi^I(x)$，表示 $S$ 及其导数如 $\delta S/\delta\phi^I(x)$ 在 $\phi^I(x)=0$ 时的取值。换句话说,它们都不是 $\phi^I(x)$ 的泛函。

把 (9-46) 式和 (9-44) 式代入 (9-45) 式,显然,只有 $S_0$ 中等于 1 的项,和含有 $\phi^I(x)$ 四次方的项,才不为零,即

$$\begin{aligned} \langle k',q'|S|k,q\rangle &= \langle k',q'|k,q\rangle \\ &+ \frac{1}{4!}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \\ &\langle k',q'\left|\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\phi^I(x_3)\phi^I(x_4)\right. \\ &\left.\frac{\delta^4 S_0}{\delta\phi^I(x_1)\delta\phi^I(x_2)\delta\phi^I(x_3)\delta\phi^I(x_4)}\right|k,q\rangle。 \end{aligned}$$

第二项中的四个 $\phi^I(x)$，两个用来消灭初态粒子，两个用来产生终态粒子，产生、消灭的方式共 4! 种。因而，第二项就等于

$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 [a(k'),\phi^I(x_1)][a(q'),\phi^I(x_2)]$$

$$<0\left|\frac{\delta^4 S}{\delta\phi^I(x_1)\delta\phi^I(x_2)\delta\phi^I(x_3)\delta\phi^I(x_4)}\right|0>$$

$$[\phi^I(x_3),a^+(k)][\phi^I(x_4),a^+(q)]。$$

$\phi^I(x)$ 是自由场算符，将其平面波展开

$$\phi^I(x)=\sum\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}(a(k)e^{-ikx}+a^+(k)e^{ikx}),$$

代入对易子，得

$$[a(k'),\ \phi^I(x_1)]=\frac{1}{\sqrt{2V\omega'}}e^{ik'x_1},$$

$$[a(q'),\ \phi^I(x_2)]=\frac{1}{\sqrt{2VE'}}e^{iq'x_2},$$

$$[\phi^I(x_3),\ a^+(k)]=\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e^{-ikx_3},$$

$$[\phi^I(x_4),\ a^+(q)]=\frac{1}{\sqrt{2VE}}e^{-iqx_4}。$$

再者，根据（9-42）式，有

$$<0\left|\frac{\delta^4 S}{\delta\phi^I(x_1)\delta\phi^I(x_2)\delta\phi^I(x_3)\delta\phi^I(x_4)}\right|0>$$

$$=i^4(\partial^2_{x1}+m^2)(\partial^2_{x2}+m^2)(\partial^2_{x3}+m^2)(\partial^2_{x4}+m^2)$$

$$<0|T\phi^I(x_1)\phi^I(x_2)\phi^I(x_3)\phi^I(x_4)S|0>$$

$$=i^4(\partial^2_{x1}+m^2)(\partial^2_{x2}+m^2)(\partial^2_{x3}+m^2)(\partial^2_{x4}+m^2)<0\text{out}$$

$$|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\text{in}>,$$

把它们代入 $S$ 矩阵元的表示式，就得到

$$<k',q'|S|k,q>=<k',q'|k,q>$$

$$+\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \frac{1}{4V^2\sqrt{\omega\omega' EE'}} \exp$$

$$[i(k'x_1+q'x_2-kx_3-qx_4)]\cdot i^4(\partial^2_{x1}+m^2)(\partial^2_{x2}+m^2)$$

$$(\partial^2_{x3}+m^2)(\partial^2_{x4}+m^2)<0\text{out}|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)$$

$$|0\text{in}>, \tag{9-47}$$

这就是介子散射 $S$ 矩阵元的约化公式。它用格林函数表示 $S$ 矩阵元。第二项中的格林函数 $<0\text{out}|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\text{in}>$ 是具有四条外腿、连接着四个传播子，如

$$\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

的顶角。$\partial^2+m^2$ 在动量空间是 $-k^2+m^2$,

$$i(\partial^2+m^2)\sim\frac{k^2-m^2+i\varepsilon}{i}。$$

这四个因子，和四个传播子相消。另外的四个因子 $1/\sqrt{2Vw}$ 是介子的外线。由是可知，(9-47) 式意味着：$S$ 矩阵元是截掉外腿、安上外线的格林函数。这个结论，对所有的 $S$ 矩阵元都是正确的。它具有普遍的、重要的意义。

## 习 题 九

1．证明：

$$|a\text{out}> = \left|a> + \frac{1}{E-H_0^s+i\varepsilon}H_i^s\right|a>。$$

2．已知：

$$H_0^I|a>=E|a>, \qquad \vec{p}^I|a>=\vec{k}|a>,$$

求证：

$$H|a\text{out}>=E|a\text{out}>, \ \vec{p}|a\text{out}>=\vec{k}|a\text{out}>。$$

$H_0^I$、$\vec{p}^I$ 是相互作用表象中的自由哈密顿算符和动量算符。$H$、

$\vec{p}$ 是海森堡表象中的哈密顿算符和动量算符。

3。已知：$\phi_{in}(x)=u(0,-\infty)\phi^I(x)u(0,-\infty)^{-1}$，

求证：$\phi_{in}(x)=V(t,-\infty)\phi(x)V(t,-\infty)^{-1}$。

$\phi(x)$、$\phi^I(x)$分别是海森堡表象、相互作用表象中的算符；$V(t,-\infty)=e^{iHt}u(t,-\infty)e^{-iHt}$。

4。证明：$\langle 0\mathrm{out}|T\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\mathrm{in}\rangle$ 是费米子的完全传播子。

5。已知：$\psi_\alpha(x)$ 是自由费米场算符，满足方程

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=0,\quad (i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\overbrace{\psi(x)\overline{\psi}(y)}=\delta^4(x-y),$$

证明 西岛公式

$$\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}T[A(x_1)B(x_2)\cdots]$$

$$=(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)T[\psi_\alpha(x)A(x_1)B(x_2)\cdots]。$$

6。导出康普顿散射 $S$ 矩阵元的约化公式。

# 第十章　准作用表象中的流和荷

粒子之间的相互作用，常常以流的形式出现。因此，对相互作用的流和荷的理解，就成了量子场论的重要课题。一个粒子，常常同时参与多种相互作用。例如，强子就既参与电磁作用，又参与强作用和弱作用。这使得它们的作用流具有比较复杂的形式。在一个问题中，要同时处理多种相互作用是困难的。而且，有些相互作用，如强相互作用，又是难以计算的。因此，在处理具体问题时，我们就要根据具体情况，把多种作用区分开来，分别对待，以期得到一些有益的结果。为此，我们引用准作用表象。

## §1. 准作用表象

粒子参与多种相互作用时，其哈密顿量可以写成

$$H = H_0 + H_i' + H_i。\tag{10-1}$$

$H_0$是自由哈密顿量，$H_i$是一种我们要强调的、可以微扰计算的相互作用哈密顿量，$H'_i$是其它的、难以计算的或者是不拟具体计算的相互作用哈密顿量。在这种情况下，我们常常采用准作用表象。在准作用表象中，态矢量的变化由相互作用哈密顿量$H_i$生成，算符的变化，由

$$H_0 + H_i' = \mathrm{H} - H_i$$

推动。换句话说，在准作用表象中，算符和态矢的运动方程，为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|a\right> = H_i\left|a\right>,\ \dot{\phi}_a(x) = i[H - H_i, \phi_a(x)]。\tag{10-2}$$

这种表象，由海森堡表象$|a>^h$、$A^h$和薛定谔表象$|a>^s$、$A^s$作幺正变换

$$\left|a\right>^{s}=e^{-iH^{h}t}\left|a\right>^{h},\quad A^{s}=e^{-iH^{h}t}A^{h}e^{iH^{h}t},\tag{10-3}$$

$$\left|a\right>=e^{i(H^{s}-H_{i}^{s})t}\left|a\right>^{s},\quad A=e^{i(H^{s}-H_{i}^{s})t}A^{s}e^{-i(H^{s}-H_{i}^{s})t}$$

就可以得到。

当粒子只参与一种相互作用时，$H-H_{i}=H_{0}$，(10-2) 式表示的表象，就是相互作用表象。当粒子参与多种相互作用时，$H-H_{i}=H_{0}+H_{i}'\neq H_{0}$，(10-2)式表示的表象，与相互作用表象不同。但是，它的态矢量的变化，还和相互作用表象中的一样，不同的只是算符的变化。因此，我们称它为准作用表象。

在准作用表象中，态矢的变化和相互作用表象中的一样，也可以用运动算符 $u(t,t_{0})$ 来实现

$$\left|t\right>=u(t,t_{0})\left|t_{0}\right>.$$

也可以定义 $S$ 矩阵

$$S=u(\infty,-\infty)$$

在一定条件下，也可以作微扰展开

$$S=\sum_{n}\frac{(-i)^{n}}{n!}\int d^{4}x_{1}d^{4}x_{2}\cdots d^{4}x_{n}T\mathscr{H}_{i}(x_{1})\mathscr{H}_{i}(x_{2})\cdots\mathscr{H}_{i}(x_{n})。\tag{10-4}$$

但是，算符的运动却和相互作用表象中的不一样，它不是由自由哈密顿量来生成，而是由 $H_{0}+H_{i}'$ 来生成。算符不再是自由场算符，而是涉及 $H_{i}'$ 的算符。这时的算符方程，常常是非线性的，是难解的，是不知其具体形式的。因而，上式中的 $\mathscr{H}_{i}(x)$，也是没有完全确定的。

在准作用表象中，能量 $H-H_{i}$ 和动量 $\vec{p}$ 是守恒量。这是由于(10-2) 式指出

$$\dot{H}-\dot{H}_{i}=i[H-H_{i},H-H_{i}]=0,$$

$$\dot{\vec{p}}=i[H-H_{i},\vec{p}]=\nabla(H-H_{i})=0。$$

在绝热近似下，我们要求：$H_i$有一绝热因子$e^{-\epsilon|t|}$，当$t\to\pm\infty$时，$e^{-\epsilon|t|}H_i\to 0$；对其它的相互作用，不作如此近似。这时的态矢量$|a>$，我们可以选用$H-H_i$和$\vec{p}$的本征态矢量

$$(H-H_i)\Big|a>=E\Big|a>,\quad \vec{p}\Big|a>=\vec{k}\Big|a>。\tag{10-5}$$

由于$H-H_i\neq H_0$，它不是自由粒子的状态，它的具体形式，也常常是未知的。

## §2。电子的电磁流和荷

电子是轻子，参与电磁作用和弱作用，不参与强作用。它的电磁作用，可以用微扰方法进行计算。它的一般特征，可以用一般的分析方法进行讨论。为此，我们考虑在外加电磁场中的电子。

**外电磁场中的电子** 外加电磁场中的电子，既受到外加的、经典电磁场的作用，也受到量子电磁场的作用。弱作用的影响，可以略去不计。这时，电子的哈密顿密度为

$$\mathscr{H}(x)=\mathscr{H}_0(x)+\mathscr{H}_i(x)+\mathscr{H}_i^e(x),$$

$\mathscr{H}_0$是电子的自由哈密顿密度，$\mathscr{H}_i$是电子与$\gamma$光子相互作用的哈密顿密度，$\mathscr{H}_i^e$是电子与外加电磁场的哈密顿密度。按照前几章的论述，它们是：

$$\begin{gathered}\mathscr{H}_0(x)=\overline{\psi}(x)\ (-i\vec{\gamma}\cdot\nabla+m)\psi(x),\\ \mathscr{H}_i(x)=eJ^\mu(x)A_\mu(x),\\ \mathscr{H}_i^e(x)=eJ^\mu(x)A_\mu^e(x),\\ J^\mu(x)=\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)。\end{gathered}\tag{10-6}$$

$A_\mu^e$是给定的、非量子的电磁场。在相互作用表象中，$\psi$、$A_\mu$都是自由场算符

$$\dot{\psi}(x)=i[H_0,\psi(x)],\ \dot{A}_\mu(x)=i[H_0,A_\mu(x)],$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big|a> = (H_i + H_i^e)\Big|a>。$$

如果略去量子电磁场的作用，令 $H_i = 0$，用微扰方法进行计算，就得到已如前述的结果。

现在，我们要讨论量子电磁场对电子的影响，就不能作以上近似。用相互作用表象就不方便，因而采用准作用表象

$$\dot{\psi}(x) = i[H - H_i^e,\ \psi(x)],\ \dot{A}_\mu(x) = i[H - H_i^e, A_\mu(x)],$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Big|a> = H_i^e\Big|a>。\tag{10-7}$$

这时，$\psi(x)$、$A_\mu(x)$、$J_\mu(x)$ 就都不是自由场算符，而有复杂的结构。在绝热近似下，$t\to\pm\infty$，$H_i^e\to 0$，态矢量 $|a>$ 也不还是自由粒子状态。但可以是 $H - H_i^e$ 和 $\vec{P}$ 的本征态，例如

$$(H - H_i^e)\Big|p,s> = p_0\Big|p,\ s>,\ \ \vec{P}\Big|p,\ s> = \vec{p}\Big|p,s>,$$

$$(H - H_i^e)\Big|q,\tau> = q_0\Big|q,\tau>,\ \ \vec{P}\Big|q,\tau> = \vec{q}\Big|q,\tau>)。\tag{10-8}$$

**电磁流的矩阵元** 为了讨论量子电磁场对电子的影响，我们计算：在经典场的一阶近似下，电子的 $S$ 矩阵元

$$S_{fi} = -i\int d^4x<q,\tau\Big|\mathscr{H}_i^e(x)\Big|p,s>$$

$$= -ie\int d^4x<q,\tau\Big|J^\mu(x)\Big|p,s>A_\mu^e(x),\tag{10-9}$$

$A_\mu^e(x)$ 是给定的、已知的经典电磁场。而电子的电磁流矩阵元 $<q,\tau|eJ_\mu(x)|p,s>$，包含了量子电磁场的全部作用，但具体形式是未知的。

场算符的时空平移，如(10-7)式、(10-8)式所示，要由算符 $H - H_i^e$ 和 $\vec{p}$ 来实现，故有

$$J_\mu(x)=\exp[i(H-H_i^e)t-i\vec{p}\cdot\vec{x}]J_\mu(0)\exp$$

$$[-i(H-H_i^e)t+i\vec{p}\cdot\vec{x}], \qquad (10\text{-}10)$$

其矩阵元为

$$<q,\tau|J_\mu(x)|p,s>=<q,\tau|J_\mu(0)|p,s>e^{i(q-p)\cdot x}。$$

代入 (10-9) 式,得

$$S_{fi}=-ie<q,\tau|J_\mu(0)|p,s>\cdot A^{e\mu}(q-p),$$

$$A_\mu^e(q-p)=\int d^4xA_\mu^e(x)e^{i(q-p)\cdot x},$$

$A_\mu^e(q-p)$ 可以由已给定的 $A_\mu^e(x)$ 按上式计算。

$$<q,\ \tau|eJ_\mu(0)|p,s>$$

是未知的、动量空间的、电子的电磁流矩阵元。

**电磁形状因子**　电磁流矩阵元$<q,\tau|eJ_\mu(0)|p,s>$，包含了量子电磁场的全部作用。由于电子状态 $|p,\ s>$、$|q,\tau>$ 不是自由粒子的状态，电磁流算符 $eJ_\mu(0)$不是自由场算符，故电磁流矩阵元 $<q,\tau|eJ_\mu(0)|p,s>$ 的具体形式是未知的。但是，从一般原理进行分析，可以推知它的一般形式。首先，它可以写成

$$<q,\tau|eJ_\mu(0)|p,\ s>=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\ \overline{u}(q,\tau)$$

$$W_\mu(p,q)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\ u(p,s), \qquad (10\text{-}11)$$

$u(p,s)$、$\overline{u}(q,\tau)$ 是自由电子的旋量波函数。$W_\mu(p,q)$ 仍然是未知的、$p$ 和 $q$ 的函数。

从张量分析的观点来看，由于 $J_\mu(0)$是矢量，$W_\mu(p,q)$ 应是由 $p_\mu$、$q_\mu$、$\gamma_\mu$ 等构成的矢量。由 $p_\mu$、$q_\mu$、$\gamma_\mu$、$\Sigma_{\mu\nu}$可以构成五种不同的矢量：$p_\mu$、$q_\mu$、$\gamma_\mu$、$\Sigma_{\mu\nu}p^\mu$、$\Sigma_{\mu\nu}q^\nu$。如果用

$$P_\mu=p_\mu+q_\mu,\ k_\mu=q_\mu-p_\mu \qquad (10\text{-}12)$$

代替 $p_\mu$、$q_\mu$，那末可能的五种矢量就是：$P_\mu$、$k_\mu$、$\gamma_\mu$、$\Sigma_{\mu\nu}p^\nu$、

$\Sigma_{\mu\nu}k^{\nu}$。因而 $W_{\mu}(p,q)$ 的可能形式是：

$$W_{\mu}(p,q)=\gamma_{\mu}F_{1}+\Sigma_{\mu\nu}k^{\nu}F_{2}+k_{\mu}F_{3}+\Sigma_{\mu\nu}P^{\nu}F_{4}+P_{\mu}F_{5}, \tag{10-13}$$

$F_{i}(i=1,2,\cdots,5)$是 $p$、$q$ 的标量函数。

如(10-11)式所示，$W_{\mu}(p,q)$是介于旋量波函数间的矩阵。(10-13)式的矢量性质，也只在把它插入旋量波函数间时才显示出来。可是，由于狄拉克方程和对易关系

$$\gamma\cdot pu(p,s)=mu(p,s),$$

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}=2g_{\mu\nu}-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu},$$

(10-13)式中的五项，不全都是独立的。独立的只有三项。实际上，

$$\overline{u}(q)\Sigma_{\mu\nu}p^{\nu}u(p)=\overline{u}(q)\frac{i}{2}[\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}](q^{\nu}+p^{\nu})u(p)$$

$$=\frac{i}{2}\overline{u}(q)[\gamma_{\mu}\gamma\cdot(q+p)-\gamma\cdot(q+p)\gamma_{\mu}]u(p)$$

$$=\frac{i}{2}\overline{u}(q)[\gamma_{\mu}\gamma\cdot q-\gamma\cdot p\gamma_{\mu}]u(p)$$

$$=\frac{i}{2}\overline{u}(q)[(2g_{\mu\nu}-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu})q^{\nu}-(2g_{\mu\nu}-\gamma_{\mu}\gamma_{\nu})p^{\nu}]u(p)$$

$$=i(q_{\mu}-p_{\mu})\overline{u}(q)u(p)$$

$$=ik_{\mu}\overline{u}(q)u(p)。$$

同理可证

$$\overline{u}(q)\Sigma_{\mu\nu}k^{\nu}u(p)=ip_{\mu}\overline{u}(q)u(p)-i2m\overline{u}(q)\gamma_{\mu}u(p)。$$

因此，$W_{\mu}(p,q)$的可能形式可以写成

$$W_{\mu}(p,q)=\gamma_{\mu}F_{1}+\Sigma_{\mu\nu}k^{\nu}F_{2}+k_{\mu}F_{3}。 \tag{10-14}$$

$F_{i}(i=1,2,3)$应该是 $p$、$q$ 构成的标量函数。由 $p_{\mu}$、$q_{\mu}$ 可以构成的标量，有：$p^{2}$、$q^{2}$、$\gamma\cdot p$、$\gamma\cdot q$、$p\cdot q$ 五种。但是，$p^{2}=m^{2}$，$q^{2}=m^{2}$ 是不变的标量；由于$\gamma\cdot pu(p)=mu(p)$，

$\overline{u}(q)\gamma\cdot q=m\overline{u}(q)$，$\gamma\cdot p$ 和 $\gamma\cdot q$ 也是不变的，可变的标量只有

$$(q-p)^2=q^2+p^2-2p\cdot q=k^2。$$

因此，$F_i$ 作为可变标量的函数，只是 $k^2$ 的函数

$$F_i(k^2),\ i=1,2,3。\tag{10-15}$$

**守恒流** 电磁流是守恒流，要求

$$\partial^\mu J_\mu(x)=0,$$

$$k^\mu\overline{u}(q)W_\mu(p,q)u(p)=0,$$

$$k^\mu\overline{u}(q)[\gamma_\mu F_1(k^2)+\Sigma_{\mu\nu}k^\nu F_2(k^2)+k_\mu F_3(k^2)]u(p)=0,$$

$$\overline{u}(q)[\gamma\cdot(q-p)F_1(k^2)+\Sigma_{\mu\nu}k^\mu k^\nu F_2(k^2)$$
$$+k^2F_3(k^2)]u(p)=0。$$

第一项，由于狄拉克方程，

$$\overline{u}(q)[\gamma\cdot(p-q)]u(p)=\overline{u}(q)(m-m)u(p)=0,$$

故而为 0。第二项，由于 $\Sigma_{\mu\nu}$ 是反对称的，而 $k^\mu k^\nu$ 是对称的，$\Sigma_{\mu\nu}k^\mu k^\nu=0$，也是 0。因此，第三项也必需是 0。这表明：电流守恒要求 $F_3(k^2)=0$，

$$W_\mu(q,p)=\gamma_\mu F_1(k^2)+\Sigma_{\mu\nu}k^\nu F_2(k^2),\tag{10-16}$$

电子的电磁流为

$$\langle q,\tau|eJ_\mu(0)|p,s\rangle=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)[\gamma_\mu F_1(k^2)$$
$$+\Sigma_{\mu\nu}k^\nu F_2(k^2)]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s),$$

它包含量子电磁场的全部效应。

实际上，量子电磁场的效应，都显示在电磁结构函数，或者说电磁形状因子 $F_i(k^2)(i=1,\ 2)$ 之中。但是，它们的具体形式，仍然是未知的。为了理解它的意义，把它代入外场对电子散射的 $S$ 矩阵元中，

$$S_{fi}=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau))[\gamma_\mu F_1(k^2)$$

$$+\Sigma_\mu k^\nu F_2(k^2)]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)A_e^\mu(k),$$

把它和用微扰方法得到的结果(7-75)式、(7-76)式比较，可知当 $q\to p, k=q-p\to 0$ 时，

$$F_1(0)=e_r,\ F_2(0)=\delta_\mu。\tag{10-17}$$

$e_r$ 是重正化电荷，$\delta_\mu$ 是电子的反常磁矩。在一般情况下，$F_i(k^2)(i=1,2)$ 是表征电子电磁特性的函数，它们不仅反映电荷和磁矩的大小，也和电荷、磁矩的分布有关，是人们瞩目的物理参量。人们对它有比较深入的研究。

## §3. 核子的电磁流和荷

核子，即质子和中子，既参与电磁作用，又参与强作用和弱作用。在外加电磁场中，其哈密顿密度为

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_i'+\mathscr{H}_i。$$

$\mathscr{H}_0$ 是自由核子的哈密顿密度，$\mathscr{H}_i'$ 是核子与量子电磁场的电磁作用，以及核子的强作用和弱作用之和，$\mathscr{H}_i$ 是核子与外加电磁场的相互作用

$$\mathscr{H}_i(x)=eJ^\mu(x)A_\mu^e(x),$$

$A_\mu^e(x)$ 是给定的、经典电磁场。

在准作用表象中，

$$\dot{\psi}(x)=i[H-H_i,\ \psi(x)],\ \dot{A}_\mu(x)=i[H-H_i, A_\mu(x)],$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|a>=H_i|a>。$$

不管是场算符 $\psi(x)$、$A_\mu(x)$，还是电磁流算符 $J_\mu(x)$，都不是自由场算符，都包含了强作用、弱作用和量子电磁作用。起主要作用的，当然是强作用。态矢量 $|a>$ 也是如此。我们可以取绝热近似，$t\to\pm\infty$ 时，$\mathscr{H}_i(x)\to 0$，$|a>$ 是 $H-H_i$ 和 $\vec{P}$ 的本征态，

如

$$(H-H_i)\left|p,s\right> = p_0\left|p,s\right>,\quad \vec{P}\left|p,s\right> = \vec{p}\left|p,s\right>,$$

$$(H-H_i)\left|q,\tau\right> = q_0\left|q,\tau\right>,\quad \vec{P}\left|q,\tau\right> = \vec{q}\left|q,\tau\right>。$$

**电磁形状因子** 尽管 $\psi(x)$、$A_\mu(x)$，因而 $J_\mu(x)$ 是未知的，但是，完全重复关于电子的类似论述，就可以推知：核子的电磁流矩阵元，有如下形式

$$^p\left<q,\tau\left|eJ_\mu(0)\right|p,s\right>^p = \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)[\gamma_\mu F^p{}_1(k^2)$$

$$+\Sigma_{\mu\nu}k^\nu F^p{}_2(k^2)]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s), \tag{10-18}$$

$$^n\left<q,\tau\left|eJ_\mu(0)\right|p,s\right>^n = \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)[\gamma_\mu F^n_1(k^2)$$

$$+\Sigma_{\mu\nu}k^\nu F^n_2(k^2)]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)。$$

角标 $p$ 表示质子，角标 $n$ 表示中子。$F^p_i(k^2)(i=1,2)$ 是质子的电磁形状因子，且有

$$F^p_1(0)=e_r,\ F^p_2(0)=\delta_{\mu p}=-1.70\frac{e_r}{2m_p}。 \tag{10-19}$$

$F^n_i(k^2)(i=1,2)$ 是中子的电磁形状因子，且有

$$F^n_1(0)=0,\ F^n_2(0)=\delta_{\mu n}=1.91\frac{e_r}{2m_p}。 \tag{10-20}$$

电荷和反常磁矩的数值，都是由实验测定的。

**同位旋流** 质子和中子都是核子，是核子的两个不同状态。质子和中子的这种对称性，用同位旋来表示。核子的同位旋状态矢量，可以写成

$$\chi=\begin{vmatrix} p \\ n \end{vmatrix},\quad \chi_p=\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix},\quad \chi_n=\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}。 \tag{10-21}$$

再把质子、中子的电磁形状因子合成

$$F_i^S=\frac{1}{2}(F_i^p+F_i^n),\quad F_i^v=\frac{1}{2}(F_i^p-F_i^n),\tag{10-22}$$

$i=1,2$,那末,(10-18)式表示的电磁流矩阵元,就可以写成

$$^N\langle q,\tau|eJ_\mu(0)|p,s\rangle^N=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)\chi^+\cdot$$

$$[\gamma_\mu(F_1^S+\tau_3F_1^v)+\Sigma_\mu k^\nu(F_2^S+\tau_3F_2^v)]$$

$$\chi\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)。\tag{10-23}$$

实际上，当 $\chi=\chi_p$ 时，它就是(10-18)式的第一式、质子的电磁流矩阵元；当 $\chi=\chi_n$ 时，它就是(10-18)式的第二式、中子的电磁流矩阵元。

(10-23)式表明：核子的电磁流，可以按同位旋区分为：包含 $\chi^+\chi$ 和 $\chi^+\tau_3\chi$ 的两部分，即分解成

$$^S\langle q,\tau|eJ_\mu^S(0)|p,s\rangle^S=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)\chi^+\chi$$

$$\left[\gamma_\mu F_1^S+\Sigma_{\mu\nu}k^\nu F_2^S\right]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s),$$

$$^v\langle q,\tau|eJ_\mu^{v3}(0)|p,s\rangle^v=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)\chi^+\tau_3\chi$$

$$[\gamma_\mu F_1^v+\Sigma_{\mu\nu}k^\nu F_2^v]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)\tag{10-24}$$

两部份之和。而且，把第一部份叫做同位旋标量流，把第二部份扩充为

$$^v\langle q,\tau|e\vec{J}_\mu^v(0)\,|p,s\rangle^v=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)\chi^+\vec{\tau}\chi$$

$$[\gamma_\mu F_1^v+\Sigma_{\mu\nu}k^\nu F_2^v]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s),\tag{10-25}$$

叫做同位旋矢量流。电磁流是同位旋标量流与同位旋矢量流第三分量之和，可以写成

$$J_{\mu}^{em}=J_{\mu}^{S}+J_{\mu}^{V3}。\tag{10-26}$$

与此相应，$F_i^S(k^2)$（$i=1,2$）叫做同位旋标量电磁形状因子；$F_i^V(k^2)$（$i=1，2$）叫做同位旋矢量电磁形状因子。而且，由(10-22)式、(10-19)式、(10-20)式，可知：

$$F_1^S(0)=\frac{1}{2}e_r,\quad F_2^S(0)=\frac{1}{2}(\delta\mu_p+\delta\mu_n),$$

$$F_1^V(0)=\frac{1}{2}e_r,\quad F_2^V(0)=\frac{1}{2}(\delta\mu_p-\delta\mu_n)。\tag{10-27}$$

## §4。$\pi-N$ 强作用的流和荷

目前认为，强作用的最有希望的理论，可能是量子色动力学。但是，历史上首先研究并取得一定成功的强作用理论，要数核力的介子理论，即$\pi$介子和核子$N$之间的强作用理论。量子色动力学，通常是以夸克和胶子之间的作用形式来论述的。介子和核子，都是由夸克构成的。它们之间的作用，可能是夸克和胶子之间的作用形成的。夸克和胶子之间的作用，如何形成$\pi-N$强作用的机制，目前还不清楚。所以，我们对$\pi-N$强作用的论述，仍然是唯象的。一般认为，它们的拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}=\overline{N}(x)\,(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)N(x)+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\vec{\phi}(x)\cdot\partial^{\mu}\vec{\phi}(x)$$

$$-\frac{1}{2}m_{\pi}^{2}\vec{\phi}(x)^{2}-\vec{J}(x)\cdot\vec{\phi}(x),$$

$$\vec{J}(x)=iG_s\overline{N}(x)\gamma_5\vec{\tau}N(x),\tag{10-28}$$

它们的运动方程是

$$(\partial^2+m_{\pi}^2)\vec{\phi}(x)=-\vec{J}(x),$$

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)N(x)=iG_{s}\gamma_{5}\vec{\tau}N(x)\cdot\vec{\phi}(x)。\quad(10\text{-}29)$$

这是非线性的微分方程组，求解是困难的。因此，不管是场算符 $N(x)$、$\vec{\phi}(x)$，还是流算符 $\vec{J}(x)$，其具体形式是未知的。

**流的矩阵元** 用 $|p,s>^{N}$ 表示单核子初态，用 $|q,\tau>^{N}$ 表示单核子终态。它们是能量、动量为 $p$ 或 $q$，自旋取向为 $s$ 或 $\tau$ 的本征态。由于强作用的影响，它们不是自由粒子态，其具体形式是未知的。但是，可以推测，它们是与自由粒子态成比例的，即

$$|p,s>^{N}\sim\sqrt{\frac{m}{VE_{p}}}u(p,s)\chi,$$

$$|q,\tau>^{N}\sim\sqrt{\frac{m}{VE_{q}}}u(q,\tau)\chi,\quad(10\text{-}30)$$

$u(p,s)$、$u(q,\tau)$ 是自旋波函数，$\chi$ 是同位旋波函数。单核子态之间的流矩阵元 $^{N}<q,\tau|\vec{J}(0)|p,s>^{N}$ 是未知的。但是，从协变性考虑，它应该是同位旋空间的矢量，是时空空间的赝标量。其一般形式，可以写成

$$^{N}<q,\tau|\vec{J}(0)|(p,s>^{N}=\sqrt{\frac{m}{VE_{q}}}\bar{u}(q,\tau)\chi^{+}\vec{F}(p,q)$$

$$\chi\sqrt{\frac{m}{VE_{p}}}u(p,s),$$

$$\vec{F}(p,q)=\vec{\tau}\gamma_{5}\kappa(p,q),\quad(10\text{-}31)$$

$\kappa(p,q)$ 应该是由 $p_{\mu}$、$q_{\mu}$ 构成的标量函数。如上两节的论述所示，由 $p_{\mu}$、$q_{\mu}$ 构成的可变标量，只有 $k^{2}$，$k_{\mu}=q_{\mu}-p_{\mu}$。所以，$\kappa(p,q)$ 只是 $k^{2}$ 的函数 $\kappa=\kappa(k^{2})$。而单核子态之间的流矩阵元，就可以写成

$$^{N}<q,\tau|\vec{J}(0)|p,s>^{N}=\sqrt{\frac{m}{VE_{q}}}\bar{u}(q,\tau)\chi^{+}\vec{\tau}\gamma_{5}\kappa(k^{2})$$

$$\chi \sqrt{\frac{m}{VE_p}}\, u(p,s)。 \quad (10\text{-}32)$$

$\kappa(k^2)$ 是强作用的形状因子，而

$$\kappa(m_\pi^2) = G, \quad (10\text{-}33)$$

是 $\pi$-$N$ 强作用荷。

对 (10-29) 式的第一式，取傅立叶变换，得

$$(k^2 - m_\pi^2)\,\vec{\phi}(0) = \vec{J}(0),$$

把它代入(10-32) 式，得

$$^V\langle q,\tau|\vec{\phi}(0)|p,s\rangle^N = \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\bar{u}(q,\tau)\chi^+ \cdot \vec{\tau}\gamma_5$$

$$\frac{\kappa(k^2)}{k^2 - m_\pi^2}\chi\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\, u(p,s)。 \quad (10\text{-}34)$$

这就是 $\pi$ 介子算符 $\vec{\phi}$，在单核子态之间的矩阵元。在 $k^2 = m_\pi^2$ 处出现奇点，$m_\pi$ 是介子质量。

## §5. 弱作用的流和荷

在四费米弱作用理论中，相互作用是以流-流耦合

$$\mathscr{H}_i^w(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu^+ J^\mu$$

的形式出现的。在弱电统一规范理论中，相互作用是以流和规范场耦合

$$\mathscr{L}_1 \sim J_a^\mu A_\mu^a$$

的形式来表征的。

**V-A流** 不管是四费米作用中的弱流，还是弱电统一规范理论中的弱流，都取 V-A 的形式，都是矢量流和轴矢流的迭加。例如，轻子流为

$$J_\mu^l(x) = \bar{l}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu(x),$$

$l(x)$是轻子场量，$\nu(x)$是相应中微子的场量。对于强子，由于强作用的影响，弱作用流有比较复杂的形式。但是，它们也由两部份合成

$$\vec{J}_\mu(x)+\vec{A}_\mu(x), \tag{10-35}$$

$\vec{J}_\mu(x)$是时空空间的矢量，$\vec{A}_\mu(x)$是时空空间的轴矢量。不管是$\vec{J}_\mu(x)$还是$\vec{A}_\mu(x)$，都是同位旋空间的矢量。箭头是同位旋空间矢量的标志。

粒子的哈密顿量，可以写成

$$H=H_0+H_i^s+H_i^e+H_i^w,$$

$H_0$是自由哈密顿量，$H_i^s$是强作用哈密顿量，$H_i^e$是电磁作用哈密顿量，$H_i^w$是弱作用哈密顿量。对于没有奇异数的强子和轻子的弱作用，其哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_i^w=\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\theta_c\,(J_\mu^+ + A_\mu^+)\cdot\overline{l}\,\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu+\text{h.c.}. \tag{10-36}$$

当讨论强子的弱作用流时，我们取准作用表象，使

$$\dot{\psi}(x)=i[H-H_i^w,\ \psi(x)],\quad i\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle=H_i^w|a\rangle。 \tag{10-37}$$

不管是场算符$\psi(x)$，还是流算符$\vec{J}_\mu(x)$、$\vec{A}_\mu(x)$，都受到强作用和电磁作用的影响，都有比较复杂的形式。

**$\beta$衰变** 为了理解流算符$\vec{J}_\mu$、$\vec{A}_\mu$的性质，我们来看它在$\beta$衰变过程中的表现。$\beta$衰变过程为

$$n\to p+e^-+\overline{\nu}_e,$$

在准作用表象中，在弱作用的最低阶近似下，$S$矩阵元是

$$S_{fi}=-i\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\theta_c\int d^4x\,\langle \overset{p}{q},\tau\,|\,J_\mu^+(x)+A_\mu^+(x)|$$

$$p, s>^{n}\sqrt{\frac{m_e}{VE_e}}e^{-ikx}\overline{u}(k,\sigma)\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)$$

$$\sqrt{\frac{1}{V}}e^{-ik'x}V(k')$$

$$= -i\frac{G}{\sqrt{2}}\cos\theta_c(2\pi)^4\delta^4(p-q-k-k')\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m_e}{E_e}},$$

$$\overline{u}(k,\sigma)\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)V(k')\,{}^{p}\!<q,\tau|J_{\mu}^{+}(0)$$

$$+A_{\mu}^{+}(0)|p,s>^{n}。$$

其中，强子流的矩阵元，${}^{p}\!<q,\tau|J_{\mu}^{+}(0)+A_{\mu}^{+}(0)|p,s>^{n}$，包含了强作用、电磁作用的影响，其具体形式是未知的。

**同位旋矢量流** 在讨论核子的电磁作用时，我们了解到存在核子的同位旋矢量流。其矩阵元如(10-25)式所示为

$${}^{N}\!<q,\tau|e\vec{J}_{\mu}(0)|p,s>^{N}=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\overline{u}(q,\tau)\chi^{+}\vec{\tau}\chi$$

$$\left[\gamma_{\mu}F_1^{v}+\Sigma_{\mu\nu}k^{\nu}F_2^{v}\right]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s), \tag{10-38}$$

它既是同位旋空间的矢量，也是时空空间的矢量。它的第三分量${}^{N}\!<q,\tau|eJ_{\mu}^{3}(0)|p,s>^{N}$，和同位旋标量流一起，合成核子的电磁流。人们认为：它的第一、第二分量，就是核子的弱作用流的矢量部分，并且

$$J_{\mu}^{+}=J_{\mu}^{1}+iJ_{\mu}^{2}, \tag{10-39}$$

其矩阵元就是

$${}^{p}\!<q,\tau|eJ_{\mu}^{+}(0)|p,s>^{n}=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\overline{u}(q,\tau)\chi_p^{+}\tau^{+}\chi_n$$

$$\left[\gamma_{\mu}F_1^{v}+\Sigma_{\mu\nu}k^{\nu}F_2^{v}\right]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)$$

$$=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\overline{u}(q,\tau)2\left[\gamma_{\mu}F_1^{v}+\Sigma_{\mu\nu}k^{\nu}F_2^{v}\right]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s), \tag{10-40}$$

电磁流是守恒的。弱矢量流，如上所述，和电磁流有共同的本质，也是守恒的。实际上

$$\partial^\mu J^3_\mu(x)=0,\ \partial^\mu J^+_\mu(x)=0,\ \partial^\mu \vec{J}_\mu(x)=0。\qquad (10\text{-}41)$$

对于弱作用的矢量荷，我们可以定义为

$$^p\langle q,\tau|GJ^+_\mu(0)|p,s\rangle^n \underset{p\leftarrow q}{\rightarrow} G_v\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)\gamma_\mu \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,u(p,s)。\qquad (10\text{-}42)$$

把上式和(10-40)式比较，考虑到

$$k=q-p\rightarrow 0,\quad F^v_1(0)=\frac{1}{2}e,$$

就得到

$$G_v\simeq G。$$

如果在（10-42）式中考虑到因子 $\cos\theta_c$，就有

$$G_v=G\cos\theta_c。\qquad (10\text{-}43)$$

弱作用的矢量荷 $G_v$，几乎和弱作用荷 $G$ 相等。

**轴矢量流** 弱作用中的矢量流和电磁作用中的矢量流，有共同的本质。它们属于同一矢量的不同分量。弱作用中的轴矢量流，在电磁作用中不存在。这是弱作用中宇称不守恒、电磁作用中宇称守恒的结果。轴矢量流 $\vec{A}_\mu(0)$ 在单核子态间的矩阵元 $^N\langle q,\tau|\vec{A}_\mu(0)|p,s\rangle^N$，是同位旋空间的矢量，是时空空间的赝矢量，可以写成

$$^N\langle q,\tau|\vec{A}_\mu(0)|p,s\rangle^N=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)\chi^+\frac{\vec{\tau}}{2}W_{\mu5}(p,q)\,\chi\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s),\qquad (14\text{-}44)$$

$W_{\mu5}(p,q)$ 是时空空间的赝矢量。

如前两节所述，我们用

$$k=q-p,\quad P=q+p$$

代替 $q$、$p$。由 $k_\mu$、$P_\mu$、$\gamma_\mu$、$\gamma_5$，$\Sigma_{\mu\nu}$，可以构成五个赝矢量

$$\gamma_\mu\gamma_5;\ k_\mu\gamma_5;\ P_\mu\gamma_5;\ \Sigma_{\mu\nu}k^\nu\gamma_5;\ \Sigma_{\mu\nu}P^\nu\gamma_5,$$

因而，$W_{\mu5}(p,q)$ 可以写成

$$W_{\mu5}(p,q)=\gamma_\mu\gamma_5 f_1+k_\mu\gamma_5 f_2+P_\mu\gamma_5 f_3 \\ +\Sigma_{\mu\nu}k^\nu\gamma_5 f_4+\Sigma_{\mu\nu}P^\nu\gamma_5 f_5。\tag{10-45}$$

$f_i(i=1,2,3,4,5)$ 是由 $p$、$q$ 构成的标量函数。我们知道，由 $p$、$q$ 构成的可变标量，只有 $k^2$，$k=q-p$。所以，$f_i$ 只是 $k^2$ 的标量函数，$f_i(k^2)$。

以(10-45)式表示的 $W_{\mu5}$，要以 $\overline{u}W_{\mu5}u$ 的形式出现。说它是赝矢量，也只在这种形式下它才具有确切的意义。和矢量情况相似，由于狄拉克方程和对易关系

$$\gamma\cdot pu(p,s)=mu(p,s),$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu=2g_{\mu\nu}-\gamma_\nu\gamma_\mu,$$

(10-45) 式中的五项，也只有三项是独立的。实际上，

$$\overline{u}(q)\Sigma_{\mu\nu}k^\nu\gamma_5 u(p)$$

$$=\overline{u}(q)\frac{i}{2}[\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu](q^\nu-p^\nu)\gamma_5 u(p)$$

$$=\frac{i}{2}\overline{u}(q)[\gamma_\mu\gamma\cdot(q-p)-\gamma\cdot(q-p)\gamma_\mu]\gamma_5 u(p)$$

$$=\frac{i}{2}\overline{u}(q)[\gamma_\mu\gamma_5\gamma\cdot p-\gamma\cdot q\gamma_\mu\gamma_5]u(p)$$

$$+\frac{i}{2}\overline{u}(q)[(2q_\mu-\gamma\cdot q\gamma_\mu)\gamma_5+\gamma_5(2p_\mu-\gamma_\mu\gamma\cdot p]u(p)$$

$$=ip_\mu\overline{u}(q)\gamma_5 u(p)。$$

同理可证

$$\overline{u}(q)\Sigma_{\mu\nu}p^\nu\gamma_5 u(p)$$

$$=ik_\mu\overline{u}(q)\gamma_5 u(p)-i2m\,\overline{u}(q)\gamma_\mu\gamma_5 u(p),$$

(10-45）式就可以约化为

$$W_{\mu5}(p,q)=\gamma_\mu\gamma_5 f_1(k^2)+k_\mu\gamma_5 f_2(k^2)+P_\mu\gamma_5 f_3(k^2)。\tag{10-46}$$

**电荷共轭条件** 在第三章讨论电荷共轭变换时，对于费米场，有

$$u=C\tilde{\bar{v}},\ \bar{u}=-\tilde{v}C^{-1},\ C^{-1}\gamma_\mu C=-\tilde{\gamma}_\mu,$$
$$C^{-1}\gamma_5 C=\gamma_5,\tag{10-47}$$

如果取轴矢量流为

$$\vec{A}_\mu=\frac{i}{2}\bar{N}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}N,$$

那末，在电荷共轭变换下，就有

$$\begin{aligned}\mathscr{C}A^3_\mu\mathscr{C}^{-1}&=\frac{i}{2}\mathscr{C}\bar{N}\mathscr{C}^{-1}\gamma_\mu\gamma_5\tau^3\mathscr{C}N\mathscr{C}^{-1}\\&=\frac{i}{2}(-\tilde{N}C^{-1})\gamma_\mu\gamma_5\tau^3C\tilde{\bar{N}}\\&=-\frac{i}{2}\tilde{N}C^{-1}\gamma_\mu CC^{-1}\gamma_5C\tau^3\tilde{\bar{N}}\\&=-\frac{i}{2}\tilde{N}(-\tilde{\gamma}_\mu)\tilde{\gamma}_5\tau^3\tilde{\bar{N}}\\&=\frac{i}{2}\tilde{N}\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}_5\tau^3\tilde{\bar{N}}\\&=-\frac{i}{2}\bar{N}\tilde{\tau}^3\gamma_5\gamma_\mu N\\&=\frac{i}{2}\bar{N}\gamma_\mu\gamma_5\tau^3N=A^3_\mu,\end{aligned}\tag{10-48}$$

$$\mathscr{C}|p,s>^N=|p,\bar{s}>^{\bar{N}}。$$

注意：(10-47)式中的$C$，是旋量空间的、电荷共轭的4×4矩阵；(10-48）式中的$\mathscr{C}$，是粒子数空间的电荷共轭算符。(10-48）式就是电荷共轭加于轴矢量流的条件。

对于轴矢量流的矩阵元，上述条件成为

$$^{p}\langle q,\tau|A_{\mu}^{3}(0)|p,s\rangle^{p}={}^{p}\langle q,\tau|\mathscr{C}^{-1}\mathscr{C}A_{\mu}^{3}(0)\mathscr{C}^{-1}\mathscr{C}|$$

$$p,s\rangle^{p}={}^{\overline{p}}\langle q,\overline{\tau}|A_{\mu}^{3}(0)|p,s\rangle^{\overline{p}}。\qquad(10-49)$$

由（10-44)式、(10-46）式可以推知：

$$^{p}\langle q,\tau|A_{\mu}^{3}(0)|p,s\rangle^{p}=\sqrt{\frac{m}{VE_{q}}}\,\overline{u}(q,\tau)\chi_{p}^{+}\frac{\tau^{3}}{2}\chi_{p}$$

$$[\gamma_{\mu}\gamma_{5}f_{1}+k_{\mu}\gamma_{5}f_{2}+P_{\mu}\gamma_{5}f_{3}]\sqrt{\frac{m}{VE_{p}}}\,u(p,s),$$

$$^{\overline{p}}\langle q,\overline{\tau}|A_{\mu}^{3}(0)|p,\overline{s}\rangle^{\overline{p}}=\sqrt{\frac{m}{VE_{q}}}\,\overline{v}(q,\tau)\chi_{\overline{p}}^{+}\frac{\tau^{3}}{2}\chi_{\overline{p}}$$

$$[\gamma_{\mu}\gamma_{5}f_{1}-k_{\mu}\gamma_{5}f^{2}-P_{\mu}\gamma_{5}f_{3}]\sqrt{\frac{m}{VE_{p}}}\,v(p,s)。\qquad(10-50)$$

反粒子的量子数和正粒子的量子数相反，故有

$$\chi_{p}^{+}\tau^{3}\chi_{p}=1,\qquad \chi_{\overline{p}}^{+}\tau^{3}\chi_{\overline{p}}=-1\qquad(10-51)$$

由（10-47）式,可证

$$\overline{u}(q,\tau)[\gamma_{\mu}\gamma_{5}f_{1}+k_{\mu}\gamma_{5}f_{2}+P_{\mu}\gamma_{5}f_{3}]u(p,s)$$

$$=-\tilde{v}(q,\tau)C^{-1}[\gamma_{\mu}\gamma_{5}f_{1}+k_{\mu}\gamma_{5}f_{2}+P_{\mu}\gamma_{5}f_{3}]C\overline{v}(p,s)$$

$$=\tilde{v}(q,\tau)[\tilde{\gamma}_{\mu}\tilde{\gamma}_{5}f_{1}-k_{\mu}\tilde{\gamma}_{5}f_{2}-P_{\mu}\tilde{\gamma}_{5}f_{3}]\tilde{\overline{v}}(p,s)$$

$$=-\overline{v}(p,s)[\gamma_{\mu}\gamma_{5}f_{1}+k_{\mu}\gamma_{5}f_{2}+P_{\mu}\gamma_{5}f_{3}]v(q,\tau)。\qquad(10-52)$$

另一方面,由(10-48)式、(10-50)式、(10-51)式，应有

$$\overline{u}(q,\tau)[\gamma_{\mu}\gamma_{5}f_{1}+k_{\mu}\gamma_{5}f_{2}+P_{\mu}\gamma_{5}f_{3}]u(p,s)$$

$$=-\overline{v}(q,\tau)[\gamma_{\mu}\gamma_{5}f_{1}-k_{\mu}\gamma_{5}f_{2}-P_{\mu}\gamma_{5}f_{3}]v(p,s)。\qquad(10-53)$$

比较(10-52)式、(10-53)式，得

$$\overline{v}(p,s)[\gamma_{\mu}\gamma_{5}f_{1}+k_{\mu}\gamma_{5}f_{2}+P_{\mu}\gamma_{5}f_{3}]v(q,\tau)$$

$$= \overline{v}(q,\tau)[\gamma_\mu\gamma_5 f_1 - k_\mu\gamma_5 f_2 - P_\mu\gamma_5 f_3]v(p,s),$$

当 $p=q$，$k=p-q=0$，$\tau=s$ 时，上式成为

$$\overline{v}(p,s)[\gamma_\mu\gamma_5 f_1(0) + P_\mu\gamma_5 f_3(0)]v(p,s)$$

$$= \overline{v}(p,s)[\gamma_\mu\gamma_5 f_1(0) - P_\mu\gamma_5 f_3(0)]v(p,s),$$

这导致

$$f_3(0) = 0。\qquad (10\text{-}54)$$

我们进一步要求 $f_3(k^2)=0$，作为电荷共轭所施加的条件。这样一来，我们就得到轴矢量流的矩阵元为

$$^N\langle q,\tau|\overrightarrow{A}_\mu(0)|p,s\rangle^N = \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)\,\chi^+\frac{\overrightarrow{\tau}}{2}\chi$$

$$[i\gamma_\mu\gamma_5 f_1(k^2) + ik_\mu\gamma_5 f_2(k^2)]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s), \qquad (10\text{-}55)$$

当 $p=q, k=q-p=0$ 时，上式成为

$$^p\langle q,\tau|A_\mu^+(0)|p,s\rangle^n = \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)$$

$$i\gamma_\mu\gamma_5 f_1(0)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s)。$$

再者，我们定义：轴矢量荷 $G_A$ 为

$$^p\langle q,\tau|A_\mu^+(0)G|p,s\rangle^n$$

$$= G_A\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)\,i\gamma_\mu\gamma_5\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s), \qquad (10\text{-}56)$$

式中 $q=p$。与上式比较，得

$$G_A = Gf_1(0)。\qquad (10\text{-}57)$$

(10-55) 式中出现的标量函数 $f_1(k^2)$、$f_2(k^2)$，和矢量流中出现的 $F_1(k^2)$、$F_2(k^2)$ 相似，是轴矢形状因子。它表征弱作用轴矢荷的分布和运动情况。

**$\pi$ 衰变** 轴矢流的性质，在 $\pi$ 衰变过程中会显现出来。

$\pi$ 衰变过程是

$$\pi^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu,$$

在准作用表象中，在弱作用

$$\mathscr{H}_i^w = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta_c A_\mu^+(x) \overline{l}(x) \gamma^\mu (1+\gamma_5) \nu(x)$$

的一阶近似下，其 $S$ 矩阵元是

$$S_{fi} = -i \frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta_c \int d^4x \langle 0 | A_\mu^+(x) | k \rangle \sqrt{\frac{m}{VE}}$$

$$\overline{u}(p,s) e^{ipx} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \sqrt{\frac{1}{V}} v(q,\tau) e^{iqx}$$

$$= -i \frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta_c (2\pi)^4 \delta^4(k-p-q)$$

$$\frac{1}{V} \sqrt{\frac{m}{E}} \overline{u}(p,s) \gamma^\mu (1+\gamma_5) v(q,\tau) \langle 0 | A_\mu^+(0) | k \rangle,$$

式中，轴矢量流的矩阵元 $\langle 0 | A_\mu^+(0) | k \rangle$ 包含了强作用和电磁作用的影响，其具体形式是未知的。

$|k\rangle$ 是赝标介子的态矢量。$A_\mu^+(0)$ 是赝矢量。因此，轴矢量流矩阵元 $\langle 0 | A_\mu^+(0) | k \rangle$，就应该是由 $k_\mu$ 构成的矢量，可以写成

$$\langle 0 | A_\mu^+(0) | k \rangle = +ik_\mu \frac{a}{\sqrt{2V\omega}},$$

$$\langle 0 | A_\mu^+(x) | k \rangle = ik_\mu \frac{a}{\sqrt{2V\omega}} e^{-ikx}, \qquad (10\text{-}58)$$

$a$ 是未知的。强作用、电磁作用的影响，都体现在 $a$ 中。把 (10-58) 式代入 $S_{fi}$，再按第六章 §4 的计算方法，可以算出 $\pi$ 介子的寿命

$$\frac{1}{\tau}=\frac{G^2\cos^2\theta_c a^2}{8\pi}m_\pi m_\mu^2\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2,$$

测量 $\pi$ 介子的寿命，代入上式就可算出 $a$。

**轴矢流部分守恒**　对(10-58)式求导，得

$$<0|\partial^\mu A_\mu^+(x)|k>=a\frac{k^2}{\sqrt{2V\omega}}e^{-ikx},$$

$k$ 是介子四维动量，$k^2=m_\pi{}^2$ 是介子质量。由于 $\pi^-\to\mu^-+\overline{\nu}$ 的几率为有限，$a$ 不能为零；而介子质量 $m_\pi\neq0$，所以，上式表明：

$$<0|\partial^\mu A_\mu^+(x)|k>=a\frac{m_\pi^2}{\sqrt{2V\omega}}e^{-ikx}\neq0,\qquad(10\text{-}59)$$

轴矢量流不是守恒的。由于 $m_\pi$ 相对于核子质量很小，上式几近于零。所以，我们常说轴矢量流部分守恒PCAC。

设想轴矢量流 $\overrightarrow{A}_\mu(x)$ 由核子场算符 $N(x)$ 构成，

$$\overrightarrow{A}_\mu(x)=\frac{1}{2}\overline{N}(x)\gamma_\mu\gamma_5\overrightarrow{\tau}N(x),$$

对它求导，得

$$\partial^\mu\overrightarrow{A}_\mu=\frac{1}{2}\partial^\mu\overline{N}\,\gamma_\mu\gamma_5\overrightarrow{\tau}N+\frac{1}{2}\overline{N}\,\gamma_\mu\gamma_5\overrightarrow{\tau}\partial^\mu N$$

$$=im\overline{N}\,\gamma_5\overrightarrow{\tau}N\neq0,$$

这里假设 $N$ 是自由核子场算符。这再一次表明：轴矢量流是不守恒的。在 $N$ 是非自由核子场算符时，上式表式不同，但结论却是一样的。

对于正 $\pi$ 介子的场算符 $\phi_\pi^+(x)$，取矩阵元

$$<0|\phi_\pi^+(x)|k>。$$

它是 $\pi$ 介子的波函数，可以写成

$$<0|\phi_\pi^+(x)|k>=\sqrt{Z_3}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e^{-ikx},\qquad(10\text{-}60)$$

$Z_3$是重正化常数。把它和(10-59)式比较，得

$$<0|\partial^\mu A_\mu^+(x)|k> = \frac{am_\pi^2}{\sqrt{Z_3}}<0|\phi_\pi^+(x)|k>0。$$

人们进一步假定：

$$\partial^\mu \overrightarrow{A}_\mu(x) = \frac{am_\pi^2}{\sqrt{Z_3}}\overrightarrow{\phi}(x), \tag{10-61}$$

并称之为$PCAC$假设。

## §6. 强、弱、电流荷间的关系

强子，既参与电磁作用，又参与强作用和弱作用。它们的这些作用，都用作用流和荷来描述。在一种作用流中，都隐含了其它的作用。这就决定了三种流荷间必然存在紧密的关系。

**矢量流荷**　本章§3的论述指出:核子的电磁流中，有同位旋标量部份,也有同位旋矢量部份。这两部份，如(10-23)式、(10-24)式所示，都是时空空间的矢量。本章§5的论述指出:核子的弱作用流中,有时空矢量部份，也有时空轴矢量部份。这两部份,如(10-40)式、(10-55)式所示,它们都是同位旋空间的矢量。电磁作用流中，弱作用流中，都含有矢量流

$$^N<q,\tau|e\overrightarrow{J}_\mu(0)|p,s>^N = \chi^+\overrightarrow{\tau}\ \chi\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)$$

$$[\gamma_\mu F_1^V(k^2) + \Sigma_{\mu\nu}k^\nu F_2^V(k^2)]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s), \tag{10-62}$$

它既是同位旋空间的矢量，也是时空空间的矢量。其同位旋第三分量$J_\mu^3(0)$属电磁流。其同位旋第一、二分量

$$J_\mu^+(0) = J_\mu^1(0) + iJ_\mu^2(0),$$

属弱作用流。它把电磁流和弱作用流联系起来。但是，由它确定的、电磁作用荷和弱作用荷，却是不同的，如(10-27)式、

(10-43)式所示，

$$e=2F_1^V(0),\ G^v=G, \tag{10-63}$$

这就是电磁流荷和弱作用流荷的差别和联系。

**轴矢量流荷** 弱作用流中，除了矢量流外，还有轴矢量流，如（10-55）式所示，其矩阵元为

$$^N\langle q,\tau|\vec{A}_\mu(0)|p,s\rangle^N=\chi^+\ \frac{\vec{\tau}}{2}\chi'\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\tau)$$

$$[i\gamma_\mu\gamma_5 f_1(k^2)+ik_\mu\gamma_5 f_2(k^2)]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s), \tag{10-64}$$

其轴矢荷如（10-57）式所示为

$$G_A=Gf_1(0)。\tag{10-65}$$

轴矢量流和矢量流不同：矢量流是守恒的

$$\partial^\mu\vec{J}_\mu(x)=0,$$

轴矢量是不守恒的。按照 PCAC 假设

$$\partial^\mu\vec{A}_\mu(x)=\frac{am_\pi^2}{\sqrt{Z_3}}\vec{\phi}(x)。\tag{10-66}$$

另一方面，本章§4的论述告诉我们：$\pi-N$强作用流$\vec{J}(0)$，是同位旋空间的矢量，是时空空间的赝标量。其矩阵元如（10-32）式所示，为

$$^N\langle q,\ \tau|\vec{J}(0)|p,s\rangle^N$$

$$=\chi^+\vec{\tau}\ \chi\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\,\overline{u}(q,\ \tau)\gamma_5\kappa(k^2)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}\,u(p,s),$$

而强作用荷为

$$G_s=\kappa(m_\pi^2)\simeq\kappa(0)。\tag{10-67}$$

核子强作用的流荷，促成$\pi$介子的运动，使介子场的运动方程成为

$$(\partial^2+m_\pi^2)\vec{\phi}(x)=-\vec{J}(x)。\tag{10-68}$$

(10-66)式表示的PCAC假设，(10-68) 式表示的介子运动方程，通过介子场算符$\vec{\phi}(x)$，把弱作用的轴矢量流$\vec{A_\mu}(x)$和$\pi-N$强作用流联系起来

$$\vec{J}(x)=\frac{\sqrt{Z_3}}{am_\pi^2}(\partial^2+m_\pi^2)\partial^\nu\vec{A}_\nu(x), \qquad (10\text{-}69)$$

这揭示了弱作用流和强作用流之间的差别和联系。

**哥德伯格-特耐曼关系** 由 (10-69) 式可以导出哥德伯格-特耐曼 (Goldberger-Treiman)关系。取 (10-69) 式在核子态之间的矩阵元，得

$$^p\langle q,\tau|J^+(x)p,s\rangle^n=\frac{\sqrt{Z_3}}{am_\pi^2}$$

$$(\partial^2+m_\pi^2)\partial^{\nu p}\langle q,\tau|A_\nu^+(x)|p,s\rangle^n, \qquad (10\text{-}70)$$

其傅立叶变换为

$$^p\langle q,\tau|J^+(0)|p,s\rangle^n=\frac{\sqrt{Z_3}}{am_\pi^2}(-k^2+m_\pi^2)$$

$$(-ik^\nu)^p\langle q,\tau|A_\nu^+(0)|p,s\rangle^n。 \qquad (10\text{-}71)$$

由 (10-32) 式、(10-55)式可知

$$^p\langle q,\tau|J^+(0)|p,s\rangle^n=2\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\overline{u}(q,\tau)\gamma_5\kappa$$

$$(k^2)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s),$$

$$^p\langle q,\tau|A_\nu^+(0)|p,s\rangle^n=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}\overline{u}(q,\tau)$$

$$[i\gamma_\nu\gamma_5f_1(k^2)+ik_\nu\gamma_5f_2(k^2)]\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)。$$

代入(10-71)式，得

$$\overline{u}(q,\tau)\gamma_5 2\kappa(k^2)u(p,s)=\frac{\sqrt{Z_3}}{am_\pi^2}(-k^2+m_\pi^2)(-i)$$

$$\overline{u}(q,\tau)[i\gamma\cdot(q-p)\gamma_5 f_1(k^2)+ik^2\gamma_5 f_2(k^2)]u(p,s)$$

$$=\frac{\sqrt{Z_3}}{am_\pi^2}(-k^2+m_\pi^2)(-i)\overline{u}(q,\tau)$$

$$[i2m\gamma_5 f_1(k^2)+ik^2\gamma_5 f_2(k^2)]u(p,s)。$$

当 $p\to q$，$k=q-p\to 0$时，

$$\kappa(0)=G_s,\ f_1(0)=G_A/G,$$

上式成为

$$\overline{u}(q,\tau)\gamma_5 2G_s u(p,s)=\frac{\sqrt{Z_3}}{a}\overline{u}(q,\tau)$$

$$2m\gamma_5\frac{G_A}{G}u(p,s),$$

这就导致

$$a=m\sqrt{Z_3}\frac{G_A}{GG_s}。\tag{10-72}$$

这就是哥德伯格-特耐曼关系式。它揭示了弱作用荷 $G$、轴矢荷 $G_A$、强作用荷 $G_s$，以及 $\pi$ 衰变常数 $a$ 之间的相互关系。

**大统一理论** 以上论述的强弱电三种相互作用的流荷之间的关系，是在分别论述各种作用流荷的基础上，推测出来的。其中，矢量流的各分量就是电磁流和弱流相应分量的假设，轴矢量部份守恒(PCAC)假设，起了决定性的作用。当然，它们是在一定基础上提出，并得到实验证实的假设。可是，从理论的角度来看，它们毕竟是假设，具有唯象的性质，还缺少本质的意义。

现在的大统一理论，把强弱电三种相互作用，用一种规范理论统一起来。从大统一规范理论看来，三种相互作用，都是规范相互作用，可以用属于一个规范群的规范场和流的作用来描写。其相互作用拉格朗日密度，可以写成

$$\mathscr{L}_i=gJ_\mu^\alpha(x)A_\alpha^\mu(x),\tag{10-73}$$

$A_\mu^\alpha(x)(\alpha=1,2,\cdots,N)$ 是规范场。$J_\mu^\alpha(x)(\alpha=1,2,\cdots,N)$ 是相应的作用流。人们认为：夸克场 $q(x)$，是基本的强子场；所有的强子都是由夸克构成的。用夸克表示的强子流，可以写成

$$J_\mu^\alpha(x)=\overline{q}(x)\gamma_\mu T^\alpha q(x), \tag{10-74}$$

$T$ $(\alpha=1,2,\cdots,N)$ 是规范群的生成元。如果夸克场属于这个规范群的n维表示，那末 $q(x)$ 就是 $n\times 1$ 矩阵，$T^\alpha$ 就是 $n\times n$ 矩阵。夸克是费米子，夸克场是费米场，因而 $q(x)$ 还是旋量空间的 $4\times 1$ 矩阵。

在大统一理论的规范场 $A_\mu^\alpha(x)(\alpha=1,2,\cdots,N)$ 中，有传递电磁作用的光子场 $A_\mu(x)$，传递弱作用的中间玻色子场 $W_\mu^\pm(x)$、$Z_\mu(x)$，传递强作用的胶子场 $G_\mu^a(x)$ $(a=1,2,\cdots 8)$，还有传递其它相互作用的其它规范场。因而，在相应的作用流中，就有电磁作用流 $J_\mu^e(x)$，弱作用流 $J_\mu^w(x)$、$J_\mu^\theta(x)$，强作用流 $J_\mu^a(x)$ 和其它强作用流。

人们认为：自然界对称、统一的程度，和作用能量的大小有关。在大统一能量～$10^{14}$GeV以上，各种相互作用是没有差别的，相互作用常数都是 $g$。在大统一能量以下，各种相互作用表现不同，相互作用常数各异。在目前的能量～ $10^2$GeV 的情况下，就有我们观察到的不同的相互作用：强作用 $G_s$，弱作用 $G$、$G_A$，电磁作用 $e$ 等。(10-72) 式表示的哥德伯格-特耐曼关系，就是在现有能阶、对称破缺下呈现的关系。

人们希望，由大统一能推出哥德伯格-特耐曼关系。可惜，人们还不知道夸克在强子中的详细机制；夸克、胶子间的强作用，如何导致 $\pi-N$ 强作用；…。因此，要在大统一理论框架中，论述各种相互作用流荷间的关系，目前还是困难的。这有待人们进一步的研究和探讨。

## 习 题 十

本章讨论了各种相互作用的流和荷及其相互关系。试对所采用的方法进行评述：

1. 准作用表象的特点、作用和意义。
2. 张量分析的作用和意义。
3. 导出二阶张量流的一般形式。
4. 荷的定义及其关系。
5. 连接各种作用流所采用的假设。